從黃金分割……到正五邊形[1]

Created by Mr. Francis Hung　　　　Last updated: 2023-07-03

1　黃金分割點

如圖 1，已給一綫段 AB，P 在 AB 之間，使得 $AP : PB = AB : AP$。P 稱為 AB 的**黃金分割點**。

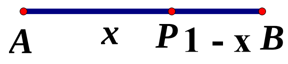

圖 1

1.　不妨假設 $AB = 1$ 單位，設 $AP = x$ 單位，則 $AP = (1 - x)$單位

由定義所得，　$x : 1 - x = 1 : x$

$x^2 = 1 - x$

$x^2 + x - 1 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\because x > 0$

$\therefore x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

2.　作圖方法如下(圖 2)：

(1)　作 AB 的垂直平分綫，C 為 AB 的中點。

(2)　作 BA 的延長綫。

(3)　以 A 為圓心，AC 為半徑，作一半圓，交 BA 的延長綫於 D。

(4)　過 A 作 AE 垂直於 AB。

(5)　以 A 為圓心，AB 為半徑，作一弧形，交 AE 於 F。

(6)　連接 DF。

(7)　以 D 為圓心，DF 為半徑，作一弧形，交 AB 於 P。

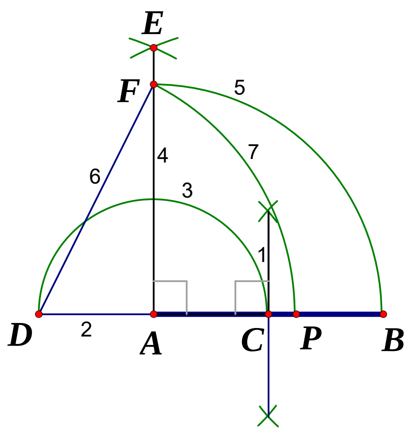

圖 2

作圖完畢。

證明如下：

$AD = AC = \dfrac{1}{2}$　　(C 為 AB 的中點及 $AB = 1$)

$AF = AB = 1$　　(由作圖所得)

$\angle DAF = 90°$　　(由作圖所得)

$DF^2 = AD^2 + AF^2$　　(於ΔADF 應用畢氏定理)

$DF^2 = \dfrac{1}{2^2} + 1 = \dfrac{5}{4}$

$DF = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$DP = DF = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(由作圖所得)

$AP = DP - DA = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$　　約等於 0.618，稱為**黃金比率**。

[1] 參考：Exercises in Technical Drawing for GCE 1970 p.36 Q8, Q9

2 黃金三角形

如圖 3，已給一等腰三角形 ABC，其中 $AB = AC = 1$ 單位。

設 P 點在 AB 上，使得 $AP = PC = BC = x$ 單位。這三角形稱為**黃金三角形**。

1. **求黃金三角形內的所有角**。

設 $\angle BAC = \theta$

$\angle ACP = \theta$ (等腰三角形的底角)

$\angle BPC = \angle PAC + \angle ACP = 2\theta$ (三角形外角)

$\angle ABC = \angle BPC = 2\theta$ (等腰三角形的底角)

$\angle ACB = \angle ABC = 2\theta$ (等腰三角形的底角)

$\theta + 2\theta + 2\theta = 180°$ (三角形內角和)

$\theta = 36°$

$\therefore \angle ACP = 36° = \angle BCP$

$\angle ABC = 72° = \angle ACB$

$\angle APC = 180° - 2\times 36° = 108°$ (三角形內角和)

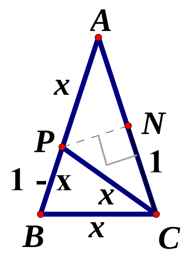

圖 3

2. 試證明 P 為 AB 的**黃金分割點**。

由上文得知，$\Delta ABC \sim \Delta CPB$ (等角)

$\dfrac{AB}{CP} = \dfrac{BC}{BP}$ (相似三角形的對應邊)

$\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x}$

$x^2 + x - 1 = 0$

$x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\therefore$ P 為 AB 的黃金分割點。

3. 假設 N 為 AC 的中點。

易證$\Delta APN \cong \Delta CPN$ (S.S.S.)

$\angle ANP = \angle CNP = 90°$ (全等三角形的對應角)

$CN = AN = \dfrac{1}{2}$ (全等三角形的對應邊)

在ΔACP 中，

$\cos 36° = \dfrac{CN}{CP} = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ …… (*)

從上述結果可求得 $\cos 36°$ 的準確值。

4. 已給邊長 $AB = AC = 1$ 單位，以**尺規作黃金三角形**。

作圖方法如下(圖 4)：

(1) 利用第 6.1 段提及的方法找出 AB 的黃金分割點 P。

(2) 以 P 為圓心，PA 為半徑，作一弧形。

(3) 以 A 為圓心，AB 為半徑，作一弧形，與步驟(2)的弧交於 C。

(4) 連接 AB、AC 和 BC。

ΔABC 為黃金三角形。

作圖完畢。

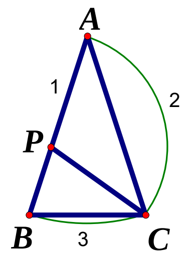

圖 4

5. 反過來說，若 $BC = 1$ 單位，求 AB。

設 $AB = y$ 單位。

$\because \Delta ABC \sim \Delta CPB$ (等角)

$\therefore \dfrac{y}{1} = \dfrac{1}{y-1}$ (相似三角形的對應邊)

$y^2 - y - 1 = 0$

$y = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 約等於 1.618，也稱為**黃金比率**。

6. 已給邊長 $BC = 1$ 單位，以**尺規作黃金三角形**。

作圖方法如下(圖 5)：

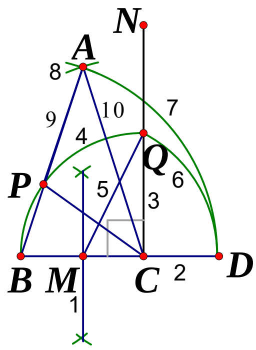

圖 5

(1) 作 BC 的垂直平分綫，M 為 BC 的中點，$MC = \dfrac{1}{2}$。

(2) 作 BC 的延長綫。

(3) 過 C 作 CN 垂直於 BC。

(4) 以 C 為圓心，BC 為半徑，作一弧形，交 CN 於 Q。

$CQ = BC = 1$

(5) 連接 MQ。

$MQ^2 = MC^2 + CQ^2$ (畢氏定理)

$MQ^2 = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow MQ = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(6) 以 M 為圓心，MQ 為半徑，作一弧形，交 BC 的延長綫於 D。

$MD = MQ = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$；$BD = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$。

(7) 以 B 為圓心，BD 為半徑，作一弧形。

(8) 以 C 為圓心，BD 為半徑，作一弧形，兩弧相交於 A。

(9) 連接 AB。

(10) 連接 AC。

$AB = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = AC$。

ΔABC 為黃金三角形。

作圖成功。

6.3 黃金矩形

如圖 6，已給一矩形 $PQRS$，其中 $PS = m$，$SR = n$，及 $m < n$。

該矩形中除去一正方形 $PTWS$，剩下的矩形 $QRWT$；旋轉 $90°$ (圖 7 及圖 8)。

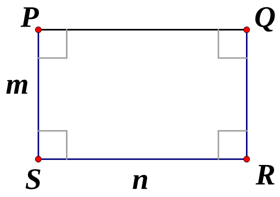

圖 6

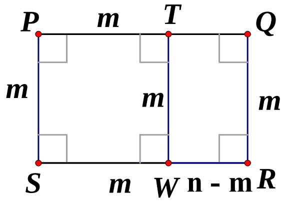

圖 7

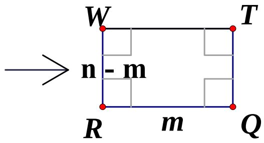

圖 8

假設 $PQRS$ 與 $WTQR$ 是相似，這長方形稱為**黃金矩形**。

1. **試求 $m : n$。**

$m : n = (n - m) : m$ (相似圖形對應邊)

$m^2 = n^2 - mn$

$m^2 + mn - n^2 = 0$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 + \frac{m}{n} - 1 = 0$$

設 $\frac{m}{n} = x$，則原式可寫成 $x^2 + x - 1 = 0$

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow m : n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} : 1 \approx 0.618 : 1$$

2. **以尺規作黃金矩形。**

作圖方法如下(圖 9)：

(1) 作綫段 SR(任意長度)。

(2) 利用第 6.1 段的方法找出 SR 的黃金分割點 W。

(3) 過 S 作綫段 SP 垂直於 SR。

(4) 以 S 為圓心，SW 為半徑，作一弧形，交 SP 於 P。

(5) 過 R 作綫段 RQ 垂直於 SR。

(6) 過 P 作綫段 PQ 垂直於 PS，與 RQ 相交於 Q。

$PQRS$ 便是黃金矩形了，作圖成功。

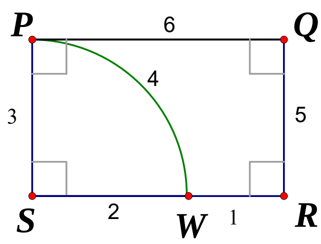

圖 9

6.4 正五邊形

1. **已給正五邊形 *PQRST*，邊長 2*a*。找出對角綫長度。**(圖 10)

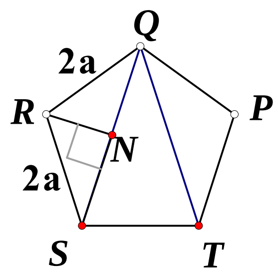

圖 10

$\angle QRS = \dfrac{180^\circ \times (5-2)}{5} = 108^\circ$ (正多邊形內角和)

設 N 為 QS 的中點。

易證$\Delta QRN \cong \Delta SRN$ (S.S.S.)

$\angle QNR = \angle SNR = 90^\circ$ (全等三角形的對應角)

$\angle RQN = \angle SRN = \dfrac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ (三角形的內角和)

$QN = NS = 2a\cos 36^\circ$ (全等三角形的對應邊)

$QS = 2QN = 4a\cos 36^\circ$

在第 72 頁第 6.2 段黃金三角形第 3 點已證明: $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ …… (*)

$\therefore\ QS = 4a\cos 36^\circ = \left(1+\sqrt{5}\right)a$

ΔQRS 三邊分別為 $2a$、$2a$ 及 $\left(1+\sqrt{5}\right)a$，三角分別為 36°、108°及 36° …… (1)

$\angle QST = \angle QTS = \dfrac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$ (等腰三角形底角)

$\Delta QRS \cong \Delta QPT$ (S.A.S.)

$\angle SQT = 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ$

ΔQST 三邊分別為 $\left(1+\sqrt{5}\right)a$、$2a$ 及 $\left(1+\sqrt{5}\right)a$，三角分別為 36°、72°及 72° ……(2)

2. **試作正五邊形 $ABCDE$，邊長 $2a$。**

作圖方法如下(圖 11)：

(1) 作 $DE = 2a$，及其垂直平分綫，F 為 DE 的中點。

(2) 過 E 作 EQ 垂直於 DE。

(3) 以 E 為圓心，ED 為半徑，作一弧，交 EQ 於 H。

(4) 以 D 為圓心，DE 為半徑，作一弧。

(5) 以 F 為圓心，FH 為半徑，作一弧，交 DE 的延長綫於 G。

(6) 以 D 為圓心，DG 為半徑，作一弧，交步驟(3)的弧於 A。

(7) 以 E 為圓心，DG 為半徑，作一弧，交步驟(6)的弧於 B，及交步驟(4)的弧於 C。

(8) 連接 $ABCDE$，則 $ABCDE$ 便是正五邊形了。

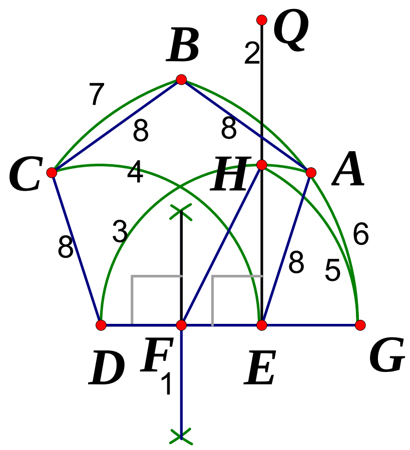

圖 11

作圖完畢。

證明如下：

$FD = FE = a$ (F 為 DE 的中點)

$\angle FEH = 90°$ (由作圖所得)

$EH = ED = 2a$ (由作圖所得)

$FH^2 = FE^2 + EH^2$ (於ΔEFH 應用畢氏定理)

$FH^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$

$FH = \sqrt{5}a$

$FG = FH = \sqrt{5}a$ (由作圖所得)

$DG = DF + FG = \left(1+\sqrt{5}\right)a$

$DA = DG = \left(1+\sqrt{5}\right)a$ (由作圖所得)

$EC = EB = DA = BD = \left(1+\sqrt{5}\right)a$ (由作圖所得)

ΔBDE 的邊長分別為 $2a$、$\left(1+\sqrt{5}\right)a$ 及 $\left(1+\sqrt{5}\right)a$。

$\Delta BDE \cong \Delta QST$ (S.S.S.，由(2)式得知)

$\angle BDE = 72° = \angle BED$ (全等三角形的對應角)

$\angle DBE = 36°$ (全等三角形的對應角)

$\because \Delta CDE \cong \Delta RST$ (S.S.S.)

$\therefore \angle CDB = 108° - 72° = 36° = \angle AEB$

$AE = 2a = CD$ (由作圖所得)

$\Delta BCD \cong \Delta QRS \cong \Delta BAE$ (S.A.S. ，由(1)式得知)

$AB = 2a = BC$ (全等三角形的對應邊)

$\angle BCD = 108° = \angle BAE$ (全等三角形的對應角)

$\angle CBD = 36° = \angle ABE$ (全等三角形的對應角)

$\angle ABC = 36° + 36° + 36° = 108°$

$\therefore ABCDE$ 為正五邊形。

證明完畢。

5 圓內接正五邊形

1. **已給一正五邊形 *PQRST*，內接於一圓，圓心 *O*，半徑為 *r*。以 *r* 表示 *PQ* 的長度(圖 12)。**

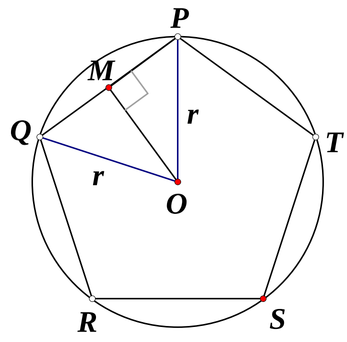

圖 12

在第 72 頁第 6.2 段黃金三角形第 3 點已證明: $\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ 。

設 M 為的中點，$PM = MQ$。

$OM = OM$ (公共邊)

$OP = OQ = r$ (半徑)

$\therefore \Delta POM \cong \Delta QOM$ (S.S.S.)

$\angle PMO = \angle QMO = 90^\circ$ (全等三角形的對應角)

$\angle POQ = 360^\circ \div 5 = 72^\circ$ (同頂角)

$\angle POM = \angle QOM = 72^\circ \div 2 = 36^\circ$ (全等三角形的對應角)

$PM = QM = r \sin 36^\circ$

$$PQ = 2PM = 2r \sin 36^\circ = 2r\sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = 2r\sqrt{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}$$

$$PQ = r\sqrt{4-\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right)} = r\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{4}} = r\sqrt{\frac{4+1-2\sqrt{5}+5}{4}} = r\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$$

2. **已給一圓，圓心 O，半徑為 r。**

試作正五邊形 $ABCDE$ 內接於圓上。

作圖方法如下(圖 13)：

(1) 過 O 作圓直徑 IOH。

(2) 作 OH 的垂直平分綫，G 為 OH 的中點。

(3) 過 O 作半徑 OA 垂直於 IH。

(4) 以 G 為圓心，GA 為半徑，作一弧，交 IH 於 J。

(5) 以 A 為圓心，AJ 為半徑，作一弧，交圓於 B 和 E。

(6) 以 B 為圓心，BA 為半徑，作一弧，交圓於 C。

(7) 以 E 為圓心，EA 為半徑，作一弧，交圓於 D。

(8) 連接 $ABCDE$，則 $ABCDE$ 便是正五邊形了。

作圖完畢。

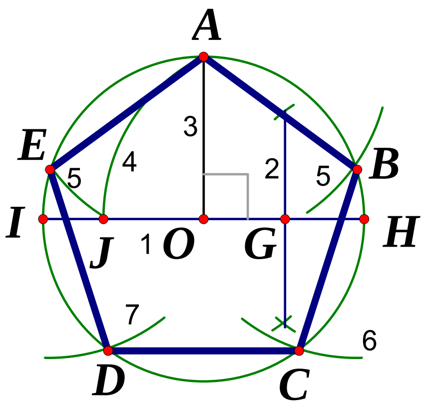

圖 13

證明如下：

$AO^2 + OG^2 = GA^2$ (在ΔAOG 應用畢氏定理)

$r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = GA^2 \Rightarrow GA = \frac{\sqrt{5}}{2}r$ (G 為 OH 的中點)

$GJ = GA = \frac{\sqrt{5}}{2}r$ (由作圖所得)

$OJ = GJ - OG = \frac{\sqrt{5}-1}{2}r$

$AJ^2 = OA^2 + OJ^2$ (在ΔAOJ 應用畢氏定理)

$$AJ = \sqrt{r^2 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right)^2} = r\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$$

$AB = BC = AE = ED = r\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$ (由作圖所得)

$OA = OB = OC = OD = OE$ (半徑)

$\Delta AOB \cong \Delta BOC \cong \Delta AOE \cong \Delta DOE \cong \Delta POQ$ (S.S.S)

$\angle AOB = 72° = \angle BOC = \angle AOE = \angle DOE$ (全等三角形的對應角)

$\therefore \angle DOC = 360° - 72° - 72° - 72° - 72° = 72°$ (同頂角)

$\therefore \Delta DOC \cong \Delta POQ$ (S.A.S)

$CD = PQ = r\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$ (全等三角形的對應邊)

$\therefore ABCDE$ 為一圓內接正五邊形

證明完畢。