根軸 (Radical axis)

Created by Mr. Francis Hung Last updated: 2023-07-03

(一) 點對圓的冪 (Power of a point with respect to a circle)

已給一個固定圓 C，圓心 O，半徑為 r，一可動點 Q 至這個圓 C 的冪定義為 $P_{QO} = QO^2 - r^2$。

P_{QO} 為一記號，QO 為有向距離。

情況一(圖 1)：

若 Q 在圓以外，由外點引切綫，切圓 C_1 於 S。

$P_{QO} = QO^2 - r^2 = QS^2$ (切綫⊥半徑，畢氏定理)

$\therefore P_{QO}$ 為外點引切綫至切點長度的平方。

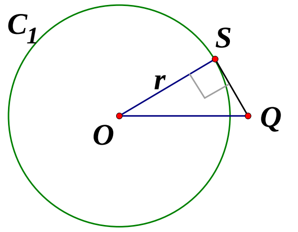

圖 1

情況二(圖 2)：

若 Q 在圓以內，$P_{QO} = QO^2 - r^2 < 0$

情況三：

若 Q 在圓上，$P_{QO} = QO^2 - r^2 = 0$

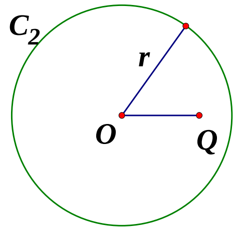

圖 2

(二) 根軸

已給兩個圓，圓心分別為 A 及 B，半徑分別為 a 和 b。若一可動點 Q 至這兩個圓的冪相同，即 $P_{QA} = P_{QB}$。Q 的軌跡稱為根軸(Radical axis)。由外點 Q 引切綫至兩圓，分別切該兩圓於 C 及 D。由定義所得，兩條切綫的長度相等，即 $QC = QD$。

情況一：兩個圓沒有相交，且 $AB > a + b$。(圖 3)

過 Q 作一綫垂直於 AB，且交 AB 於 O。設 $AB = c$。

$$\begin{aligned}0 = P_{QA} - P_{QB} &= (QA^2 - a^2) - (QB^2 - b^2)\\ &= (AO^2 + OQ^2) - (OB^2 + OQ^2) - a^2 + b^2\\ &= (AO + OB)(AO - OB) - a^2 + b^2 \ \ldots (1)\\ &= AB(AO - AB + AO) - a^2 + b^2\\ &= 2AB\cdot AO - AB^2 - a^2 + b^2 = 2c\cdot AO - c^2 - a^2 + b^2\end{aligned}$$

$$\therefore AO = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$$

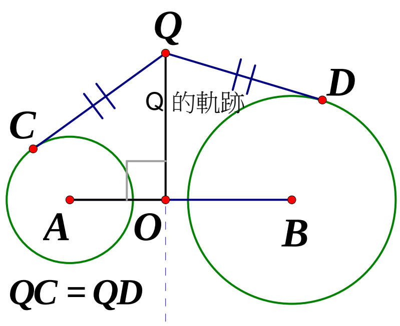

圖 3

因此，AO 為一常數，與 Q 的位置無關。

$$\begin{aligned}P_{OA} - P_{OB} &= (OA^2 - a^2) - (OB^2 - b^2)\\ &= (AO + OB)(AO - OB) - a^2 + b^2 = 0 \quad \text{由(1)式得知}\end{aligned}$$

$\therefore Q$ 的軌跡經過 O。

$\therefore$ **Q 的軌跡為一直綫，經過 O，且與 AB 垂直。**

情況二： 兩圓相交於 S 和 T。(圖 4)

明顯地，$P_{SA} = SA^2 - a^2 = 0 = SB^2 - b^2 = P_{SB}$

$\therefore$ 該兩圓的根軸經過 S 和 T。

若 R 在直綫 ST 上任意一點，$P_{RA} = RA^2 - a^2$; $P_{RB} = RB^2 - b^2$

$$\begin{aligned}P_{RA} - P_{RB} &= (AO^2 + OR^2) - (OB^2 + OR^2) - a^2 + b^2\\ &= (AO + OB)(AO - OB) - a^2 + b^2\\ &= 0 \quad \text{由 (1)式所得}\end{aligned}$$

一如情況一的分析，**Q 的軌跡為一直綫，經過 ST，且與 AB 垂直。**

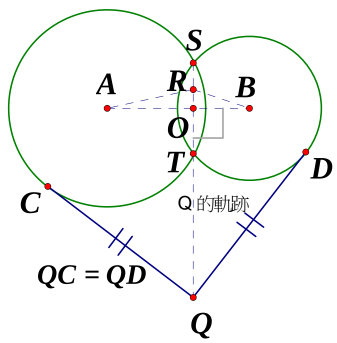

圖 4

情況三：兩圓相切(外切或內切)於 S (及圖 6)。**Q 的軌跡為該兩圓的公切綫。**

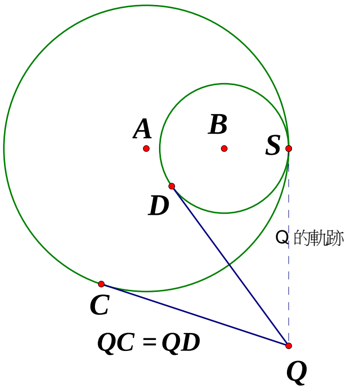

圖 5

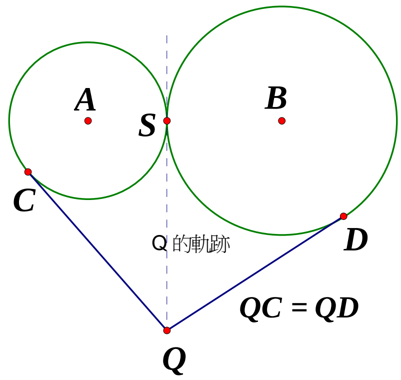

圖 6

情況四：兩個圓沒有相交，且 $0 < AB < a - b$ (圖 7)。

Q 的軌跡為一直綫，經過 O，且與 AB 垂直。

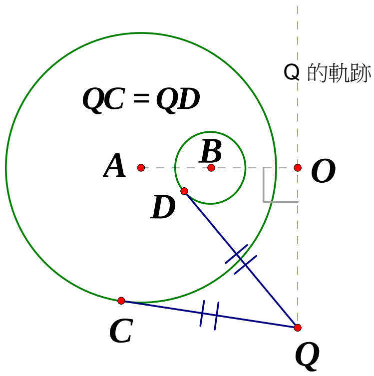

圖 7

(三) **試以尺規作兩圓的根軸。**

若兩圓相交或相切，作法簡易和明顯，故從略。

若兩個圓沒有相交，且 $AB > a + b$，作圖方法如下(圖 8)：

(1) 作外公切綫，分別切兩圓於 R 和 S。(參閱 5.4 作外公切綫)

(2) 利用垂直平分綫，找出 RS 的中點 T。

(3) 連接 AB。

(4) 作過 T 且垂直於 AB 之綫，交 AB 於 O。

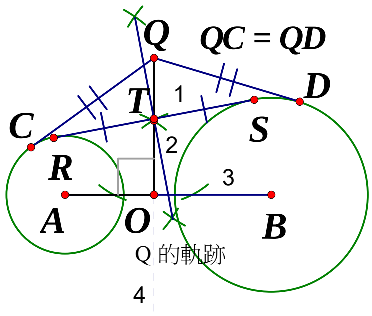

圖 8

作圖完畢，證明如下：

設 Q 為此垂綫上任意一點。

$TR = TS \Rightarrow P_{TA} = P_{TB} \Rightarrow P_{TA} - P_{TB} = 0$

$0 = (TA^2 - a^2) - (TB^2 - b^2)$

$= (AO^2 + OT^2) - (OB^2 + OT^2) - a^2 + b^2$

$= (AO + OB)(AO - OB) - a^2 + b^2$ …… (2)

$P_{QA} - P_{QB} = (QA^2 - a^2) - (QB^2 - b^2)$

$= QA^2 - QB^2 - a^2 + b^2$

$= (AO^2 + OQ^2) - (OB^2 + OQ^2) - a^2 + b^2$

$= (AO + OB)(AO - OB) - a^2 + b^2 = 0$ 由 (2) 式所得

$\therefore$ OTQ 為兩圓的根軸。

證明完畢。

若兩個圓沒有相交，且 $0 < AB < a - b$，

作圖方法如下(圖 9)：

(1) 連接 AB，其延長綫交大圓(圓心 A)於 L 和 G，交小圓(圓心 B)於 E 和 F。$LG = 2a$，$EF = 2b$，L、A、E、B、F、G 順序共綫。

(2) 過 B 作垂直於 AG 之綫段，交大圓(圓心 A)於 J。

(3) 以 J 為圓心，JE 為半徑作一圓，交大圓(圓心 A)於 H 及 K。

(4) 連接 HK，其延長綫交 AB 的延長綫於 O。

(5) 過 O 作垂直於 AO 之綫段。

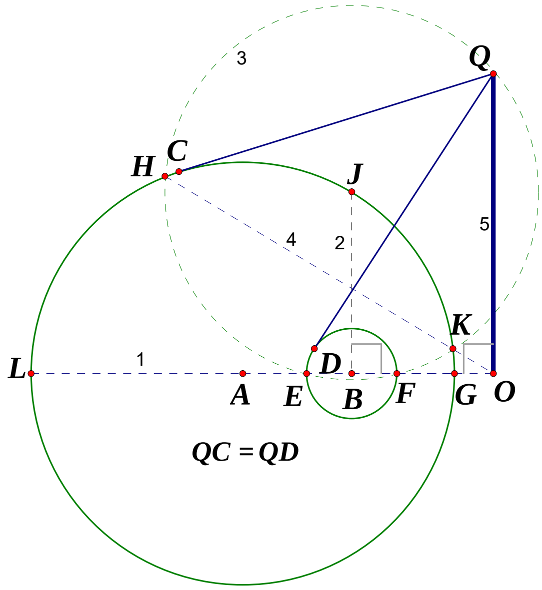

圖 9

作圖完畢，證明如下：

$\Delta BEJ \cong \Delta BFJ$ (S.A.S.)

$\therefore JF = JE$ (全等三角形的對應邊)

$\therefore$ 步驟(3)的圓經過 E、F、K 及 H。

設 Q 為步驟(5)的垂綫上任意一點。

考慮圓 $EFKH$，由相交弦定理(intersecting chords theorem)，得知 $OE\cdot OF = OH\cdot OK$

$P_{OA} = OA^2 - a^2 = (OA + a)(OA - a) = OL\cdot OG = OH\cdot OK$ (相交弦定理)

$P_{OB} = OB^2 - b^2 = (OB + b)(OB - b) = OE\cdot OF = OH\cdot OK$ (相交弦定理)

$\therefore P_{OA} = P_{OB}$

即 O 在根軸上。OQ 便是該根軸，證明完畢。

討論：若 $A = B$，則兩圓為同心圓，步驟(4)HK 與 AB 平行而沒有交點；此時根軸在無限遠。

(四) 已給三個圓，圓心分別為 A、B 及 C，半徑分別為 a、b 和 c；其圓心不共綫。

證明三條根軸共點。

設 L_1 為 B 與 C 的根軸；L_2 為 A 與 C 的根軸；L_3 為 A 與 B 的根軸。

假設其中兩條根軸 L_2、L_3 相交於 O。

$P_{OA} = P_{OB}$ 及 $P_{OA} = P_{OC}$

$\therefore P_{OB} = P_{OC}$

$\therefore L_1$ 經過 O 點。

$\therefore L_1$、L_2、L_3 共點於 O。

O 點稱為**根心(radical centre)**。

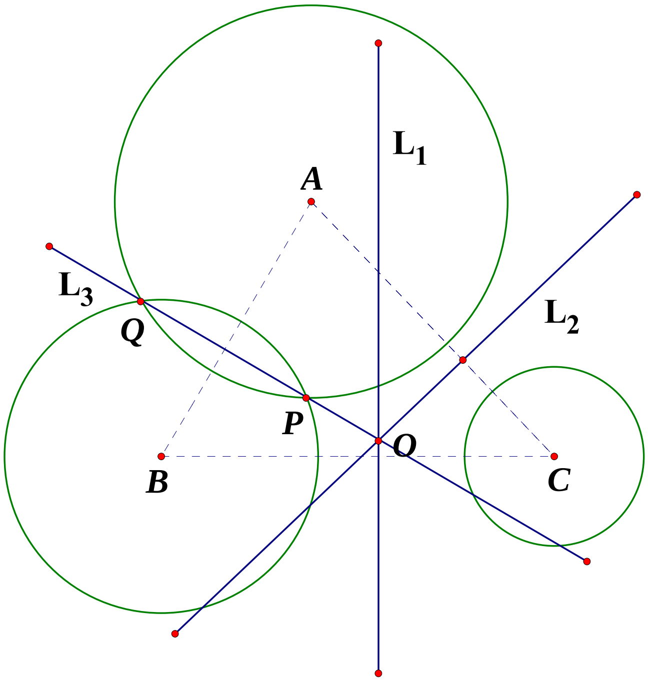

圖 10

練習題：由於 $P_{OA} = P_{OB} = P_{OC}$

$\therefore$ 過 O 至這三個圓的切綫長度相等，假設長度為 t。

以 O 為圓心，t 為半徑，作一圓，試證明此圓與原先三個圓垂直相交。(cut each other orthogonally)