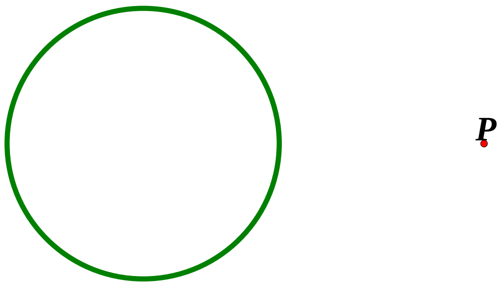
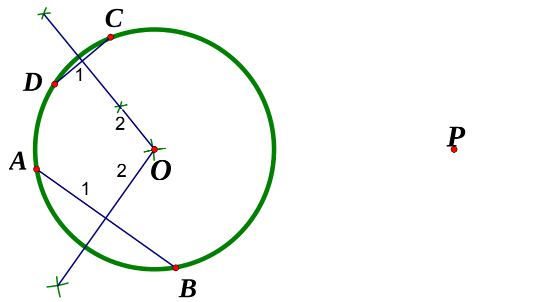
由外點引圓的切綫

Created by Mr. Francis Hung Last updated: 2023-07-03

如圖一，過一圓外定點 *P* 作切綫。[1]



圖一



圖二

作圖方法如下：

方法一：

(1) 在圓上作兩條不平行的弦綫 AB 和 CD。

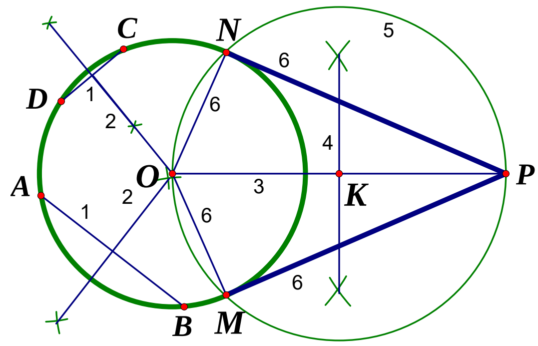
(2) 作 AB 和 CD 的垂直平分綫相交於 O，O 為該圓的圓心。(圖二)

(3) 連接 OP。

(4) 作 OP 的垂直平分綫，K 為 OP 的中點。

(5) 以 K 為圓心，KO 為半徑作一圓，交已知圓於 M 和 N。

(6) 連接 OM、ON、MP 及 NP。(圖三)



圖三

作圖完畢。

證明如下：

$\angle OMP = 90° = \angle ONP$ (半圓上的圓周角)

PM、PN 便是切綫。 (切綫⊥半徑的逆定理)

證明完畢。

方法二(圖四)

(1) 過 P 點作任意一綫段交已知圓於 Q、R。R 離 P 較遠一端。

(2) 利用 PR 的垂直平分綫，找出 PR 的中點 O。

(3) 以 O 為圓心，OP 為半徑作一半圓。

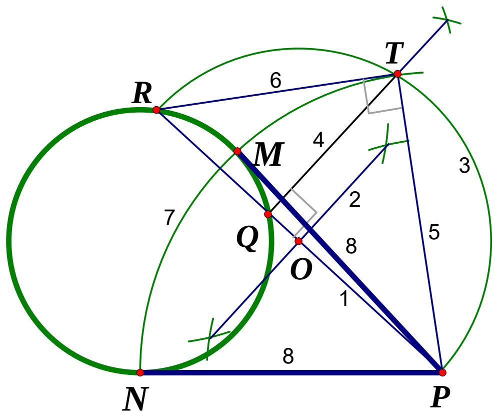
(4) 過 Q 點(Q 在 P 和 R 之間)，作一綫段 QT 垂直於 PR，交步驟(3)的半圓於 T。

(5) 連接 PT。

(6) 連接 TR。

(7) 以 P 為圓心，PT 為半徑作一弧，交已知圓於 M、N。

(8) 連接 PM、PN。



圖四

作圖完畢，證明如下：

$\angle PTR = 90°$ (半圓上的圓周角)

$\Delta PQT \sim \Delta PTR$ (等角)

$\dfrac{PQ}{PT} = \dfrac{PT}{PR}$ (相似三角形的對應邊)

$\therefore PQ \cdot PR = PT^2$

由步驟(7)，$PQ \cdot PR = PT^2 = PM^2 = PN^2$

$\therefore PM$ 及 PN 便是切綫。 (相交弦定理的逆定理)

證明完畢。

[1]香港數學競賽 2009 初賽(幾何作圖)樣本題第 3 題