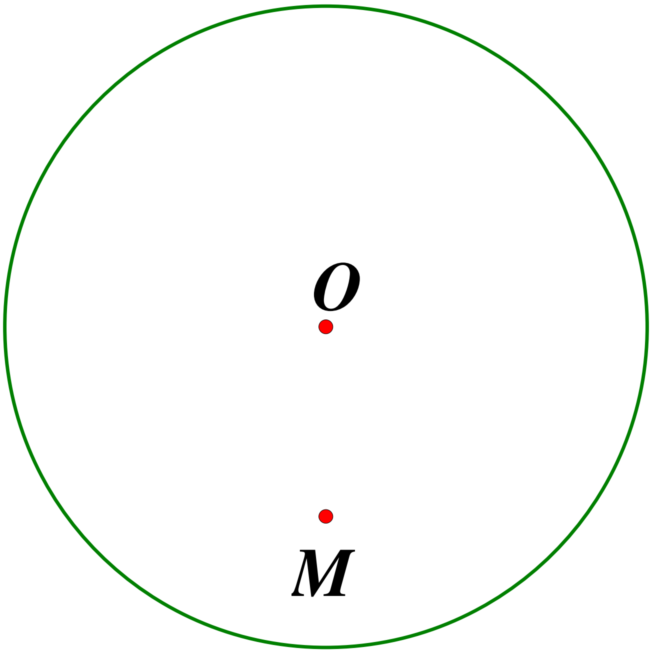
過圓內定點作符合特定比的弦綫

Created by Mr. Francis Hung on 20100415 Last updated: 2021-10-06

已給 M 點在一圓內，以尺規作一弦綫 AMB，使得 $AM : MB = 2 : 3$。



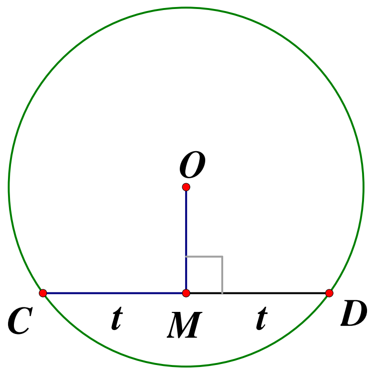


圖 1

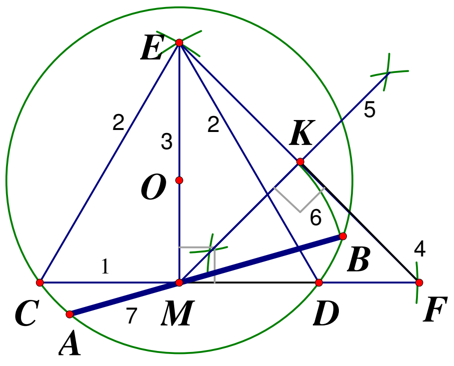


圖 2

作圖方法如下：

方法一：

(1) 設 O 為圓心，連接 OM，作弦綫 $CMD \perp OM$。(圖 1)

(2) 作等邊三角形 CDE。

(3) 連接 OE。

(4) 以 M 為圓心，ME 為半徑作一弧，交 CD 之延長綫於 F。(圖 2)

(5) 作 EF 的垂直平分綫得中點 K，連接 MK。

(6) 以 M 為圓心，MK 為半徑作一弧，交圓於 B。

(7) 連接 BM，其延長綫交圓於 A。

作圖完畢，證明如下：

設 $CD = 2t = DE = CE$。

$CM = MD = t$ (圓心至弦的垂綫平分弦)

E、O、M 共綫。 (弦的垂直平分綫必定經過圓心)

$EM = \sqrt{(2t)^2 - t^2} = \sqrt{3}t$ (畢氏定理)

$MF = ME = \sqrt{3}t$ (由作圖所得)

ΔEMF 為一個直角等腰三角形。

$EF = \sqrt{\left(\sqrt{3}t\right)^2 + \left(\sqrt{3}t\right)^2} = \sqrt{6}t$ (畢氏定理)

$EK = \dfrac{\sqrt{6}t}{2}$

$MK = \sqrt{\left(\sqrt{3}t\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{6}t}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{6}t}{2}$ (畢氏定理)

$MB = \dfrac{\sqrt{6}t}{2}$

$AM \times MB = CM \times MD$ (相交弦定理)

$AM \times \dfrac{\sqrt{6}t}{2} = t^2$

$AM = \dfrac{\sqrt{6}t}{3}$

$\therefore AM : MB = \dfrac{\sqrt{6}t}{3} : \dfrac{\sqrt{6}t}{2} = 2 : 3$

證明完畢。

註一：若 M 與 O 距離太接近($MK > OM + OB$)，有可能未能作弦綫 AMB。(圖 3)

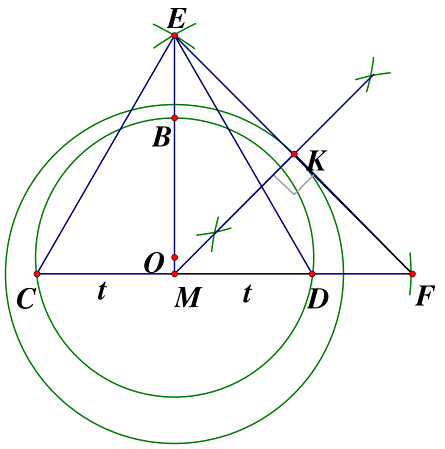


圖 3

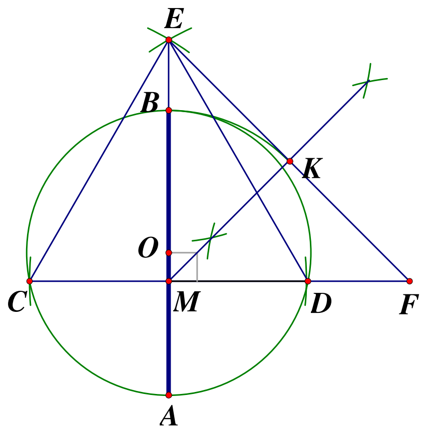


圖 4

我們希望找出極限點 M。

假設 EM 交圓於 B，BM 的延長綫交已知圓於 A。

以 M 為圓心，MK 為半徑作一圓弧與已知圓相切於 B。

一如上文分析，$AM : MB = 2 : 3$。

極限點 M 滿足 $MK = MB$ (圖 4)。

$\frac{\sqrt{6}t}{2} = MB = OM + r$，其中 r 為已知圓的半徑。

$$\frac{\sqrt{6}t}{2} = \sqrt{r^2 - t^2} + r$$

$$\frac{\sqrt{6}t}{2} - r = \sqrt{r^2 - t^2}$$

$$\frac{3t^2}{2} + r^2 - \sqrt{6}tr = r^2 - t^2$$

$$\frac{5t^2}{2} = \sqrt{6}tr$$

$$t = \frac{2\sqrt{6}r}{5}$$

$$OM = \sqrt{r^2 - t^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{2\sqrt{6}r}{5}\right)^2} = \frac{r}{5}$$

換句話說，若 $OM < \frac{r}{5}$，則未能作弦綫。

方法二(圖 5)：

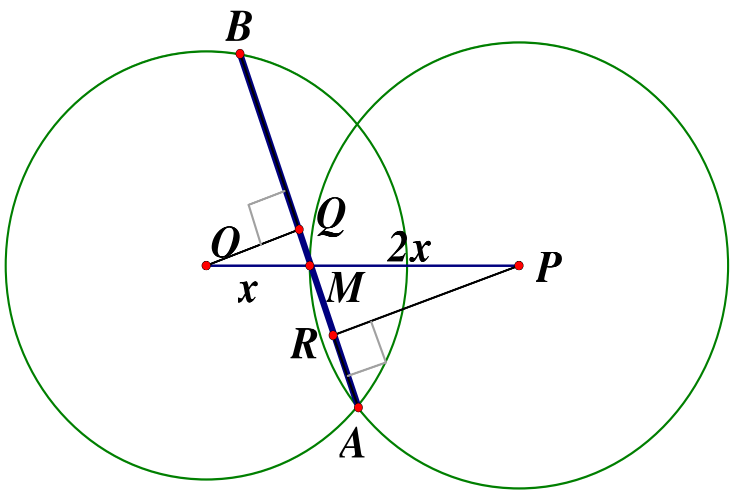


圖 5

(1)　將 OM 延長至 P，使得 $OM : MP = 1 : 2$，設 $OM = x$，$MP = 2x$。

(2)　以 P 為圓心，PM 為半徑作一圓，交已知圓於 A。

(3)　連接 AM，其延長綫交已知圓於 B。

作圖完畢，證明如下：

設 Q 和 R 分別為 O 及 P 至 AB 的垂足。

$\Delta OQM \sim \Delta PRM$　(等角)

設 $QM = t$，$MR = 2t$　(相似三角形的對應邊)

$AR = MR = 2t, BQ = AQ = t + 2t + 2t = 5t$　(圓心至弦的垂綫平分弦)

$AM : MB = (2t + 2t) : (5t + t) = 2 : 3$

證明完畢。

註二：相比之下，這方法更簡單和直接。

　　我們可以這方法作任意弦綫比例 $m : n$，詳情由讀者自行推敲。

註三：當 M 與 O 距離太接近，同樣有可能未能作弦綫 AMB。(圖 6)

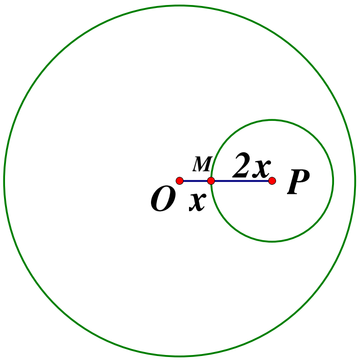


圖 6

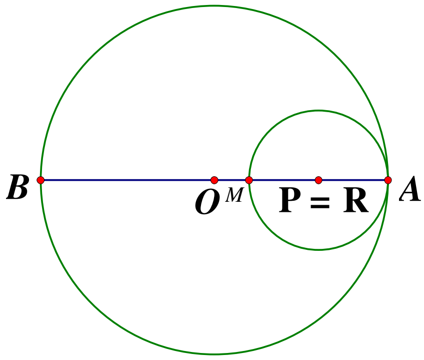


圖 7

如圖 6，以 P 為圓心的小圓未必能與已知的大圓相交。

在極限點，小圓內切大圓於 A。(圖 7)

此時，$OA = x + 2x + 2x = 5x = r =$ 已知的大圓的半徑，即 $x = \frac{r}{5}$。

換句話說，若 $OM < \frac{r}{5}$，則未能作弦綫。