作二圓經過兩已知點並與已知直綫相切

Created by Mr. Francis Hung on 20090217　　Last updated: 06 October 2021

如圖 1，已給一直綫 L，兩點 A、B 在 L 的同一方，且 AB 與 L 不平行。作二圓經過 A、B 及與 L 相切。

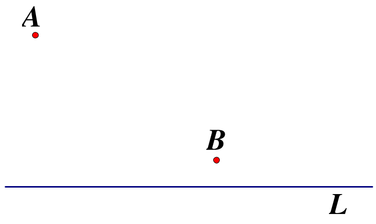

圖 1

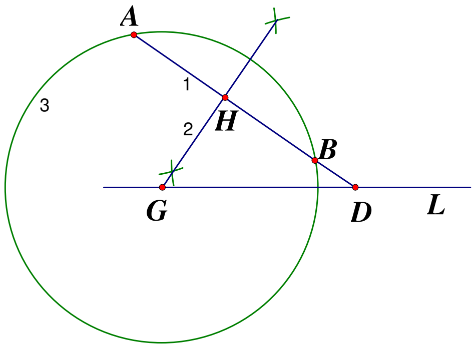

圖 2

作圖方法如下(圖 2、圖 3 及圖 4)：

(1)　連接 AB，其延長綫交 L 於 D。

(2)　作 AB 的垂直平分綫，交 L 於 G，H 為 AB 的中點。

(3)　以 G 為圓心，GA 為半徑作一圓。(圖 2)

(4)　作 GD 的垂直平分綫，M 為 GD 的中點。

(5)　以 M 為圓心，MG 為半徑作一圓，交步驟(3)的圓於 E。

(6)　連接 EG、DE。(圖 3)

(7)　以 D 為圓心，DE 為半徑作一圓，交 L 於 F(在 D 與 G 之間)及 C(在 GD 之延長部分)。

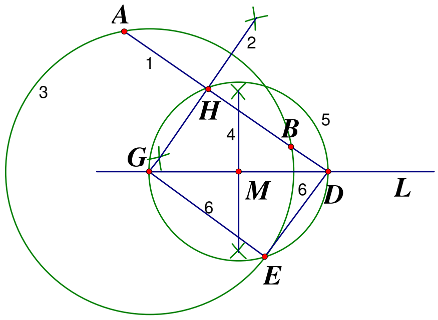

圖 3

(8)　過 F 作一綫段垂直於 L，且交 GH 的延綫於 O，過 C 作一綫段垂直於 L，且交 GH 的延長綫於 Q。

(9)　以 O 為圓心，OA 為半徑作一圓；以 Q 為圓心，QA 為半徑作一圓。(圖 4)

作圖完畢。

證明如下：

$\angle AHG = \angle BHG = 90°$ (由作圖所得)

$GH = GH$ (公共邊)

$AH = HB$ (由作圖所得)

$\therefore \Delta AGH \cong \Delta BGH$ (S.A.S.)

$GA = GB$ (全等三角形的對應邊)

$\therefore$ 步驟(3)的圓經過 A、B。

利用相同方法，

可證明步驟(9)的二圓皆經過 A、B。

$\angle GED = 90°$ (半圓上的圓周角)

$\therefore DE$ 切步驟(3)的圓於 E。

(切綫垂直於半徑的逆定理)

$DA \times DB = DE^2$ (相交弦定理)

$\because DE = DF = DC$ (半徑)

$\therefore DA \times DB = DF^2$ 及 $DA \times DB = DC^2$

$\therefore DF$ 切圓 ABF 於 F 及 DC 切圓 ABC 於 C

(相交弦定理的逆定理)

證明完畢。

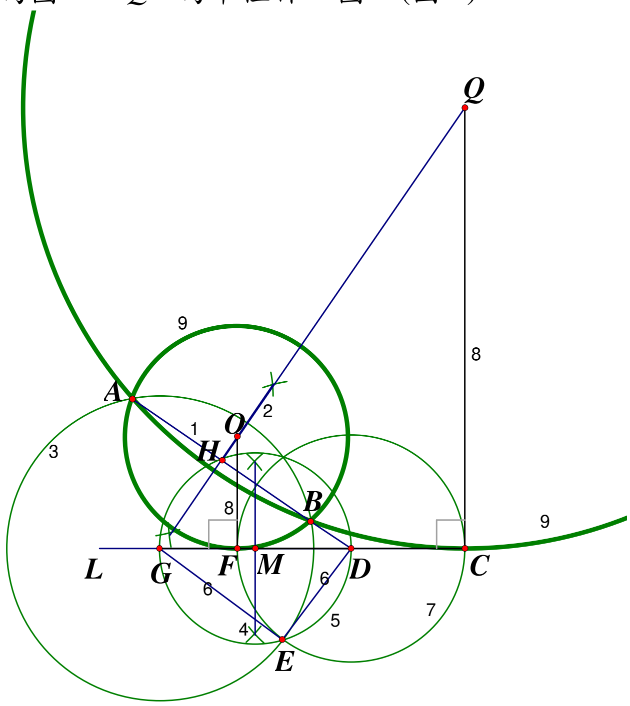

圖 4

已給一直綫 L，兩點 A、B 在 L 的同一方，且 AB 與 L 平行。
作一圓經過 A、B 及與 L 相切。

作圖方法如下(圖 5)：

(1) 作 AB 的垂直平分綫，交 L 於 C。

(2) 連接 AC。

(3) 作 AC 的垂直平分綫，交步驟(1)的垂直平分綫於 O，O 為 ΔABC 的外心。

(4) 以 O 為圓心，OA 為半徑，作一圓。

作圖完畢。

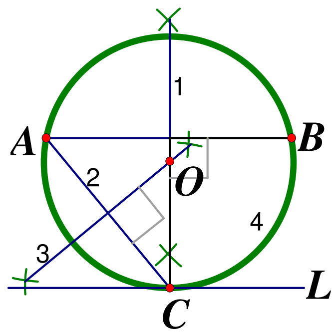

圖 5

證明如下：

$OC \perp L$ (同傍內角，AB // L)

該圓切 L 於 C (切綫⊥半徑的逆定理)

證明完畢。

註：若 A、B 在 L 的不同一方，則**不能**作一圓經過 A、B，且與 L 相切。