作二圓經過已知點並與一已知角的兩邊相切

Created by Mr. Francis Hung on 20090217 Last updated: 2021-10-06

如圖 1，已給∠*AOB*(其中∠*AOB* < 180°)，一點 *P* 在∠*AOB* 內，作二圓經過 *P*，且與 *OA* 及 *OB* 相切。[1]

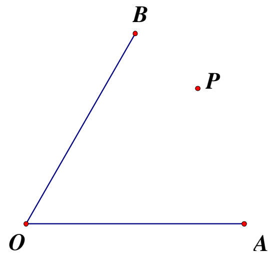

圖 1

作圖方法如下：

(1)　連接 *OP*。

(2)　作 *AOB* 的角平分綫。

若 *P* 在此角平分綫上(圖 2)，

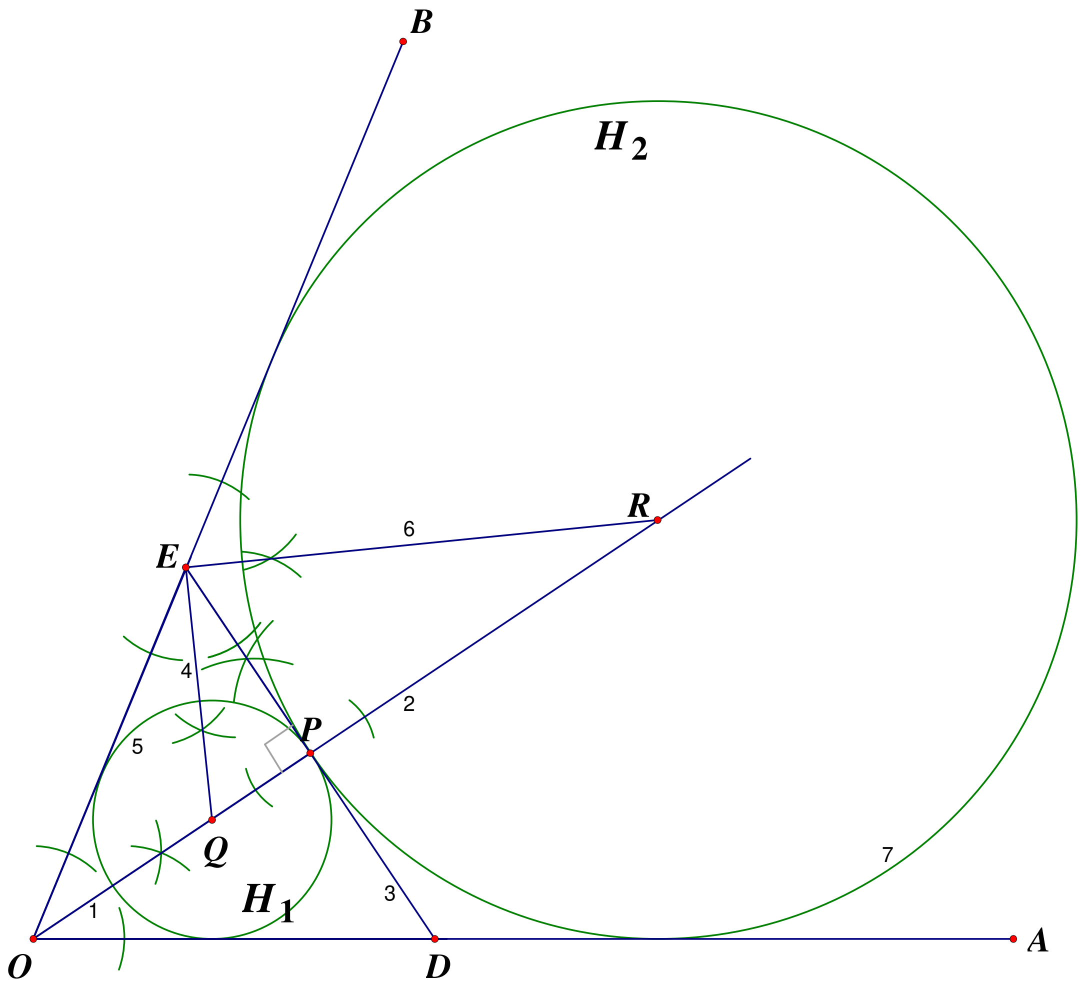

圖 2

(3)　過 *P* 作一綫段與 *OP* 垂直，交 *OA* 於 *D*、交 *OB* 於 *E*。

(4)　作 ∠*OED* 的角平分綫，交 *OP* 於 *Q*。

(5)　以 *Q* 為圓心，*QP* 為半徑作一圓 H_1。

(6)　作 ∠*BED* 的角平分綫(即∠*OED* 的外角平分綫)，交 *OP* 的延長綫於 *R*。

(7)　以 *R* 為圓心，*RP* 為半徑作一圓 H_2。

此二圓經過 *P*，且與 *OA* 及 *OB* 相切。作圖完畢。

證明如下：

根據定義，H_1 為Δ*ODE* 的內切圓，H_2 為Δ*ODE* 的外切圓。

∴ 該二圓經過 *P*，且與 *OA* 及 *OB* 相切。證明完畢。

[1]參考：Exercises in Technical Drawing for GCE 1970 p.39 Q16-17

若 P 不在此角平分綫上，作圖步驟第 1 至 2 與上文相同(圖 3)。

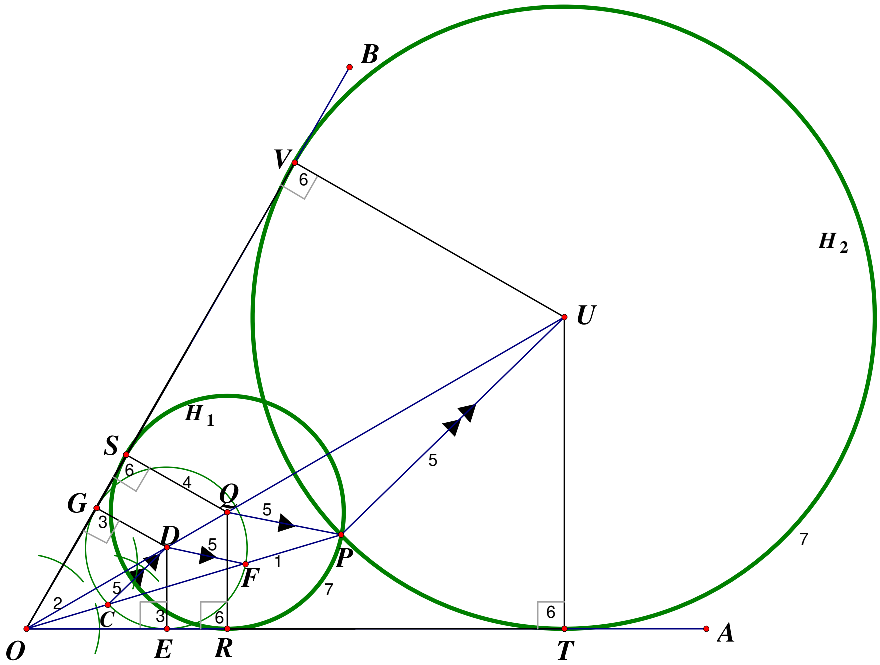

圖 3

(3) 在角平分綫上任取一點 D。分別作過 D 且垂直於 OA 及 OB 之綫段，E 和 G 分別為兩垂足。

(4) 以 D 為圓心，DE 為半徑作一圓，交 OP 於 C 及 F，其中 $OC < OF$。

(5) 連接 DF，過 P 作一綫段與 DF 平行，交角平分綫於 Q。
連接 CD，過 P 作一綫段與 CD 平行，交角平分綫於 U。

(6) 分別作過 Q 且垂直於 OA 及 OB 之綫段，R 和 S 分別為兩垂足。
分別作過 U 且垂直於 OA 及 OB 之綫段，T 和 V 分別為兩垂足。

(7) 以 Q 為圓心，QR 為半徑作一圓 H_1。以 U 為圓心，UT 為半徑作另一圓 H_2。

作圖完畢。

證明如下：

一如上文分析，步驟 4 的圓分別切 OA 及 OB 於 E 及 G。

$\angle QOR = \angle QOS$	(角平分綫)
$OQ = OQ$	(公共邊)
$\angle QRO = 90° = \angle QSO$	(由作圖所得)
$\therefore \Delta QOR \cong \Delta QOS$	(A.A.S.)
$QR = QS$	(全等三角形的對應邊)
圓 H_1 分別切 OA 及 OB 於 R 及 S。	(切綫⊥半徑的逆定理)
$\Delta ODG \sim \Delta OQS$ 及 $\Delta ODF \sim \Delta OQP$	(等角)
$\frac{QS}{DG} = \frac{OQ}{OD}$ 及 $\frac{OQ}{OD} = \frac{QP}{DF}$	(相似三角形的對應邊)

$\therefore \frac{QS}{DG} = \frac{QP}{DF}$

$\because DG = DF$

$\therefore QS = QP$

$\therefore$ 圓 H_1 經過 P。

利用相同的方法，可證明圓 H_2 分別切 OA 及 OB 於 T 及 V，及經過 P。證明完畢。