作二圓與已知圓相切於特定點並相切於已知直綫

Created by Mr. Francis Hung Last updated: 2023-07-03

如圖 1，已給直綫 L，及一圓 C(圓心 G)經過 P 點，且不與 L 相交。作一圓 C_1 外切 C 於 P 點及一圓 C_2 內切 C 於 P 點，且與 L 相切。

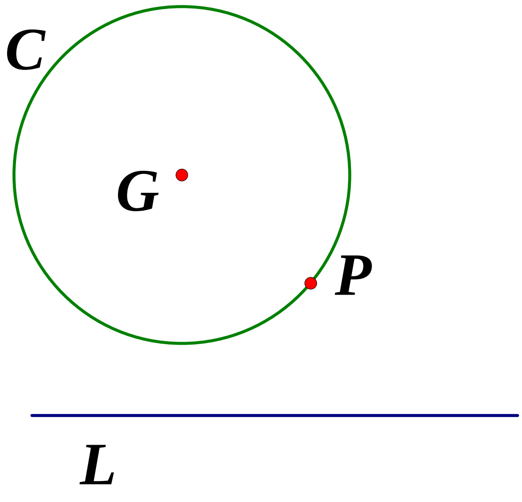

圖 1

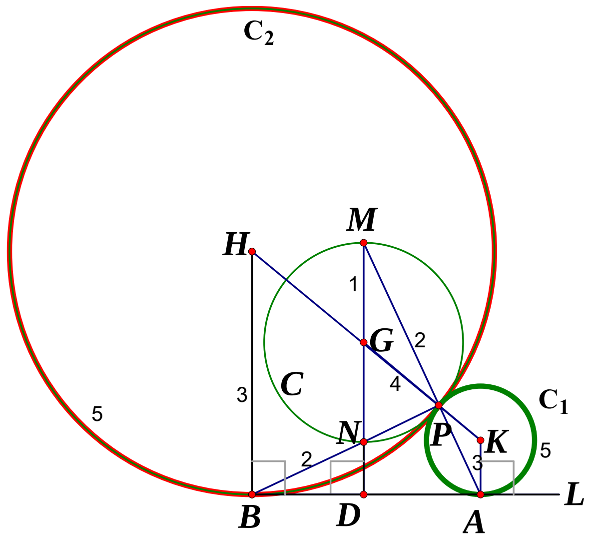

圖 2

作圖方法如下(圖 2)：

(1) 過 G 作 MD 垂直於 L，交 L 於 D，交圓 C 於 M (離 L 較遠一端)及 N(離 L 較近一端)。

(2) 連接 MP，其延長綫交 L 於 A；連接 PN，其延長綫交 L 於 B。

(3) 過 A 作 AK 垂直於 L，過 B 作 BH 垂直於 L。

(4) 連接 GP，其延長綫交 AK 於 K，且交 BH 於 H。

(5) 以 K 為圓心，KP 為半徑作一圓 C_1；以 H 為圓心，HP 為半徑作一圓 C_2。

作圖完畢。

證明如下：

$\angle HBD + \angle MDB = 90° + 90° = 180°$ (由作圖所得)

$\angle KAD + \angle MDA = 90° + 90° = 180°$ (由作圖所得)

$HB \,//\, MD \,//\, KA$ (同傍內角互補)

$\Delta MGP \sim \Delta AKP$ 及 $\Delta NGP \sim \Delta BHP$ (等角)

$\frac{KP}{KA} = \frac{GP}{GM}$ 及 $\frac{HP}{HB} = \frac{GP}{GN}$ (相似三角形的對應邊)

$\because GM = GP$ 及 $GN = GP$ (圓 C 的半徑)

$\therefore KP = KA$ 及 $HP = HB$

圓 C_1 經過 A、P 及圓 C_2 經過 B、P。

$\because H$、G、P、K 共綫

$\therefore GP + PK = GK$ 及 $HP - GP = HG$

圓 C_1 外切圓 C 於 P 及圓 C_2 內切圓 C 於 P。

$\angle KAD = 90° = \angle HBD$ (由作圖所得)

$\therefore$ 圓 C_1 及圓 C_2 與 L 相切。 (切綫⊥半徑的逆定理)

證明完畢。

已給直綫 L，及一圓 C(圓心 G)經過 P 點，且與 L 相交，其中 P 不在 L 上。作一圓 C_1 內切 C 於 P 點及一圓 C_2 外切 C 於 P 點，且與 L 相切。

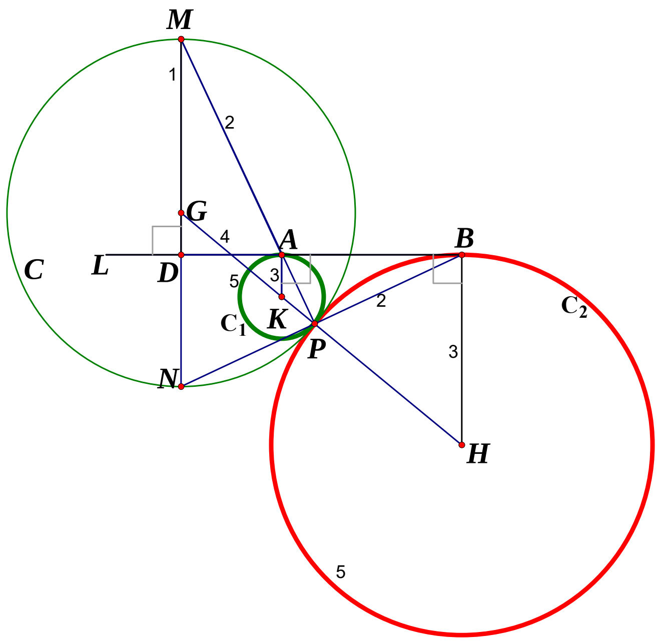

圖 3

作圖方法(圖 3)與上頁相似：不妨假設 P 與 G 在 L 的相反一方。

(1) 過 G 作 MD 垂直於 L，交 L 於 D，交圓 C 於 M(與 G 在 L 的同一方)及 N(與 G 在 L 的相反一方)。

(2) 連接 MP，交 L 於 A；連接 NP，其延長綫交 L 於 B。

(3) 過 A 作 AK 垂直於 L，過 B 作 BH 垂直於 L。

(4) 連接 GP，其延長綫交 BH 於 H；GP 交 AK 於 K。

(5) 以 K 為圓心，KP 為半徑作一圓 C_1，以 H 為圓心，HP 為半徑作一圓 C_2。

作圖完畢，證明從略。

思考題：

如圖 4，已給直綫 L，及一圓 C(圓心 G)經過 P 點，且與 L 相切於 D，其中 P 不在 L 上。請問可作多少個圓與 C 相切，經過 P 點，且與 L 相切？作圖法如何？

另外，在圖 3 或圖 4 中，若 P 是圓 C 與 L 的交點，以上作圖法是否正確？

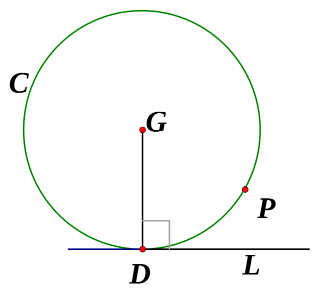

圖 4