作二圓與已知圓相切並與已知直綫相切於特定點

Created by Mr. Francis Hung Last updated: 2023-07-03

如圖 1，已給直綫 L 經過 P 點，及一圓 C(圓心 G)與 L 相交，其中 P 點在圓 C 外。作二圓外切 C，且與 L 相切於 P 點。[1]

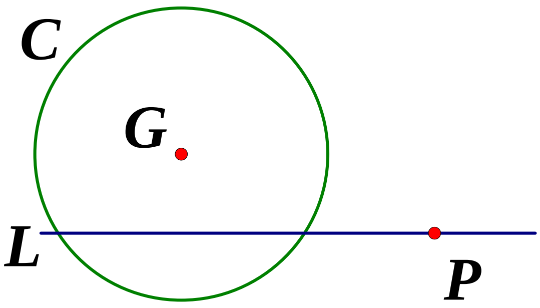

圖 1

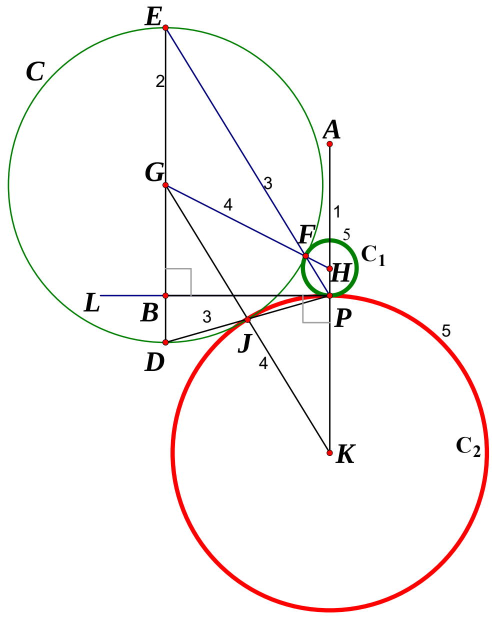

圖 2

作圖方法如下(圖 2)：

(1) 過 P 作 AP 垂直於 L。

(2) 過 G 作 EB 垂直於 L，交 L 於 B，交圓 C 於 E(離 L 較遠一端)及 D(離 L 較近一端)。

(3) 連接 DP，交圓 C 於 J；連接 EP，交圓 C 於 F。

(4) 連接 GF，其延長綫交 AP 於 H；連接 GJ，其延長綫交 AP 的延長綫於 K。

(5) 以 H 為圓心，HF 為半徑作一圓 C_1；以 K 為圓心，KJ 為半徑作一圓 C_2。

作圖完畢，證明如下：

$\angle GBP + \angle HPB = 90° + 90° = 180°$ (由作圖所得)

$EB \,//\, HP$ (同傍內角互補)

$\Delta EFG \sim \Delta PFH$ (等角)

$\dfrac{HP}{GE} = \dfrac{HF}{GF}$ (相似三角形的對應邊)

$\because GE = GF$ (圓 C 的半徑)

$\therefore HF = HP$

圓 C_1 經過 F、P

G、F、H 共綫

$HF + FG = HG$

$\therefore$ 圓 C_1 外切 C 於 F

$\angle BPH = 90°$ (由作圖所得)

$\therefore$ 圓 C_1 與 L 相切於 P (切綫⊥半徑的逆定理)

利用相似的方法，可證明 C_2 為另一外切圓，滿足所需條件，證明完畢。

---

[1] 參考：Exercises in Technical Drawing for GCE 1970 p.40 Q20

已給直綫 L 經過 P 點，及一圓 C(圓心 G)不與 L 相交。

分別作一圓 C_1 外切 C 及另一圓 C_2 內切 C，且與 L 相切於 P 點。

作圖方法(圖 3)與第 56 頁完全相同。

現證明 C_2 為一內切圓：

$\angle GBP + \angle HPB = 90° + 90° = 180°$ (由作圖所得)

$EB \mathbin{//} AP$ (同傍內角互補)

$\Delta DJG \sim \Delta PJK$ (等角)

$\frac{KP}{GD} = \frac{KJ}{GJ}$ (相似三角形的對應邊)

$\because GD = GJ$ (圓 C 的半徑)

$\therefore KP = KJ$

圓 C_2 經過 P 及 J

$\because J$、G、K 共綫

$\therefore GK = JK - GJ$

$\therefore$ 圓 C_2 內切 C 於 J

$\angle BPK = 90°$ (由作圖所得)

$\therefore$ 圓 C_2 與 L 相切於 P。 (切綫⊥半徑的逆定理)

證明完畢。

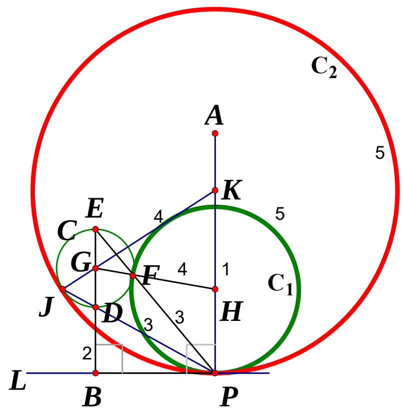

圖 3

已給直綫 L 經過 P 點，及一圓 C(圓心 G)與 L 相交，其中 P 點在圓 C 內。作二圓內切 C，且與 L 相切於 P 點。

作圖方法(圖 4)與第 56 頁相似：

(1) 過 P 作 AP 垂直於 L。

(2) 過 G 作 ED 垂直於 L，交 L 於 B，交圓 C 於 E(離 L 較遠一端)及 D(離 L 較近一端)。

(3) 連接 DP，其延長綫交圓 C 於 J；連接 EP，其延長綫交圓 C 於 F。

(4) 連接 GF，交 AP 的延長綫於 H；連接 GJ，交 AP 於 K。

(5) 以 H 為圓心，HF 為半徑作一圓 C_2；以 K 為圓心，KJ 為半徑作一圓 C_1。

作圖完畢，證明從略。

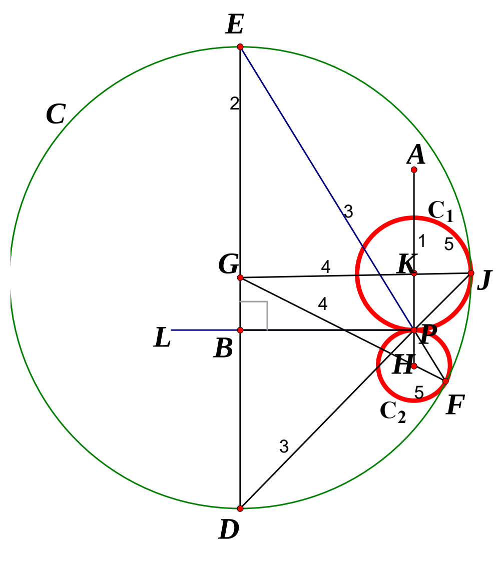

圖 4