作外公切綫

Created by Mr. Francis Hung Last updated: 2023-07-03

已給兩個圓 C_1 和 C_2，圓心和半徑分別為 A、B 和 R、r；且 $AB > R + r$ 及 $R > r$，作兩圓的外公切綫。[1]

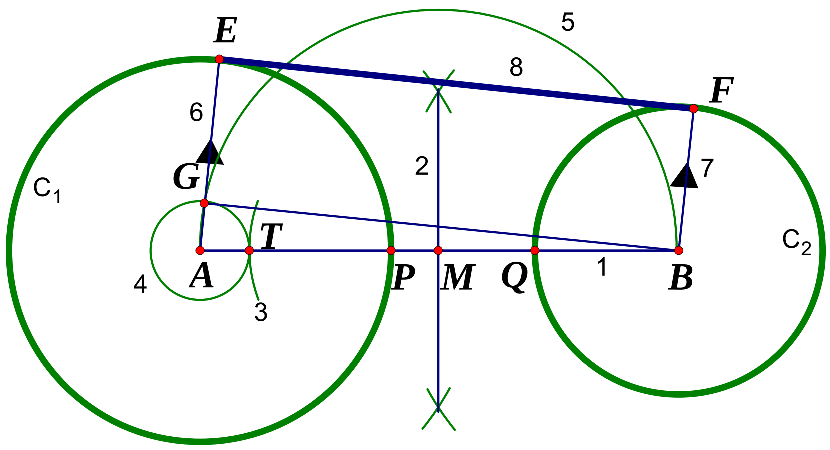

圖 1

作圖方法如下(圖 1):

(1) 連接 AB，分別交圓 C_1 和圓 C_2 於 P 和 Q；$AP = R$，$BQ = r$。

(2) 作 AB 的垂直平分綫，找出 AB 的中點 M；$AM = MB$。

(3) 以 P 為圓心，BQ 為半徑作一弧，交 AP 於 T；$PT = BQ = r$，則 $AT = AP - PT = R - r$。

(4) 以 A 為圓心，AT 為半徑作一圓。

(5) 以 M 為圓心，$MA = MB$ 為半徑作一半圓，交步驟(4)的圓於 G；$AG = AT = R - r$。

(6) 連接 AG，其延長綫交圓 C_1 於 E；$GE = AE - AG = r$。

(7) 過 B 作一綫段 BF 平行於 AGE，交圓 C_2 於 F。

(8) 連接 EF，則 EF 便是兩圓的外公切綫了。

作圖完畢。

證明如下:

$GE = r = BF$	(由步驟(6)所得)
$BFEG$ 是一個平行四邊形	(對邊相等且平行)
$\angle AGB = 90°$	(半圓上的圓周角)
$\therefore$ $BFEG$ 為一個長方形	
$\angle GEF = \angle BFE = 90°$	(長方形的性質)
$\therefore$ EF 是兩圓的外公切綫	(切綫⊥半徑的逆定理)

證明完畢。

註：除了 EF 之外，還有另一條外公切綫，作法由讀者自行推敲。

討論一 若 $0 < AB < R - r$，則圓 C_2 在圓 C_1 內，而沒有公切綫。
(圖 2)

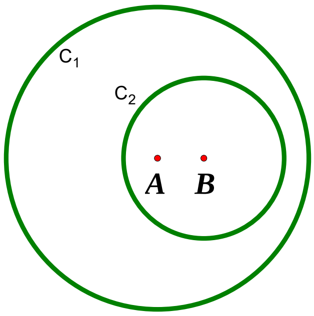

圖 2

[1]題目由教育局數學教育組梁廣成先生提供

討論二 若 $0 < AB = R - r$，則圓 C_2 內切圓 C_1 於 P，過 P 作一直綫垂直於 AB，這便是公切綫了。(圖 3)

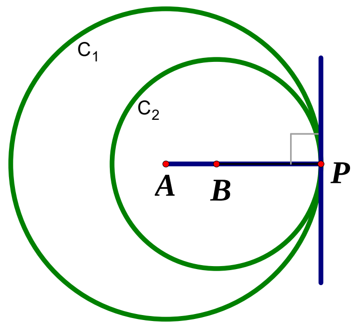

圖 3

討論三 若 $0 < R - r < AB < R + r$，兩圓相交；作圖步驟相同。(圖 4)

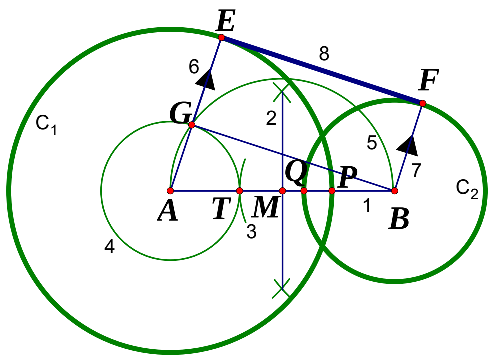

圖 4

討論四 若 $AB = R + r$，兩圓外切於一點 P；作圖步驟相同。(圖 5)

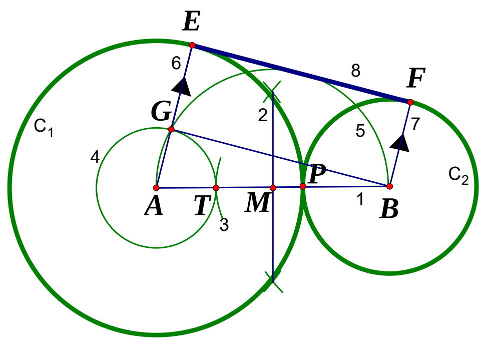

圖 5

討論五 若 $AB > 0$ 及 $R = r$；作圖方法如下：

(1) 連接 AB。

(2) 過 A 作綫段 PAS 垂直於 AB，且交圓 C_1 於 P、S。

(3) 過 B 作綫段 QBT 垂直於 AB，且交圓 C_2 於 Q、T。
(P、Q 在同一方，S、T 在另一方。)

(4) 連接 PQ。

(5) 連接 ST。

作圖完畢。

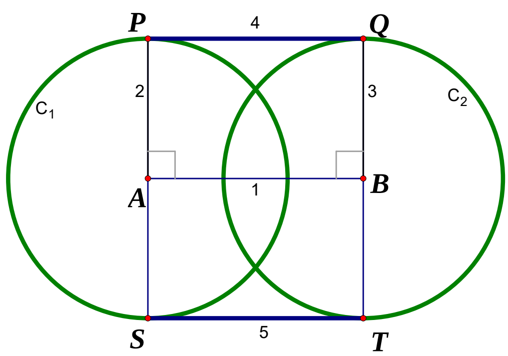

圖 6

證明如下：

$AP = BQ$ 及 $AS = BT$	(等圓半徑)
$\angle BAP = 90° = \angle ABQ$	(由作圖所得)
PAS // QBT	(同傍內角互補)
$\therefore$ $PQBA$ 及 $ABTS$ 為平行四邊形。	(對邊平行且相等)
$\because$ $\angle PAB = 90°$，$\angle SAB = 90°$	(由作圖所得)
$\therefore$ $PQBA$ 及 $ABTS$ 為長方形。	
$\angle APQ = 90° = \angle BQP = \angle AST = \angle BTS$	(長方形的性質)
$\therefore$ PQ 及 ST 為該兩圓的公切綫。	(切綫⊥半徑的逆定理)

證明完畢。