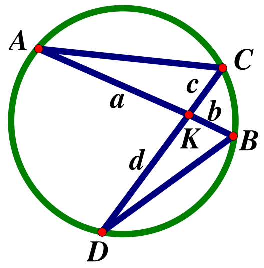
相交弦定理及其逆定理

Created by Mr. Francis Hung
Last updated: 5 September 2021

定理一 如圖一，兩弦綫 AB 和 CD 相交於圓內一點 K。

若 $AK = a$，$BK = b$，$CK = c$，$DK = d$，則 $ab = cd$。



圖一

證明：$\angle KAC = \angle KDB$ (同弓形上的圓周角)

$\angle KCA = \angle KBD$ (同弓形上的圓周角)

$\angle AKC = \angle DKB$ (對頂角)

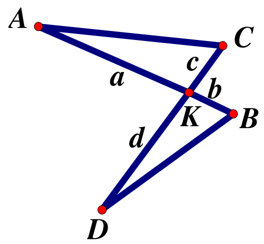
$\Delta AKC \sim \Delta DKB$ (等角)

$\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$ (相似三角形的對應邊)

$ab = cd$

證明完畢。

逆定理：如圖二，若兩綫段 AB 和 CD 相交於一點 K；$AK = a$，$BK = b$，$CK = c$，$DK = d$；且 $ab = cd$，則 A、C、B、D 四點共圓。



圖二

證明：$\angle AKC = \angle BKD$ (對頂角)

$ab = cd \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{c}{b}$ (已知)

$\therefore \Delta AKC \sim \Delta DKB$ (兩邊成比例，一夾角相等)

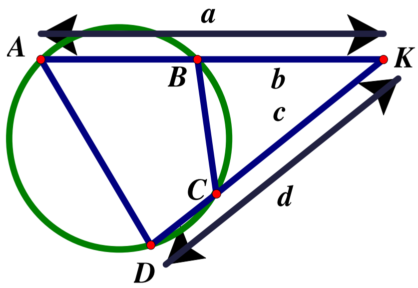
$\angle KCA = \angle KBD$ (相似三角形的對應角)

A、C、B、D 四點共圓。 (同弓形上的圓周角的逆定理)

證明完畢。

定理二 如圖三，兩弦綫 AB 和 CD 相交於圓外一點 K。

若 $AK = a$，$BK = b$，$CK = c$，$DK = d$，則 $ab = cd$。



圖三

證明：$\angle KAD = \angle KCB$ (圓內接四邊形外角)

$\angle KDA = \angle KBC$ (圓內接四邊形外角)

$\angle AKD = \angle CKB$ (公共角)

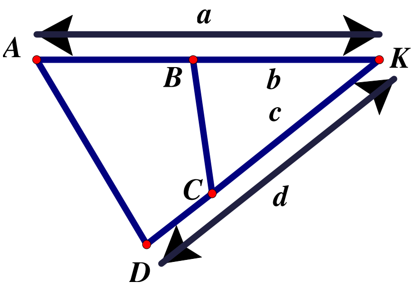
$\Delta AKD \sim \Delta CKB$ (等角)

$\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ (相似三角形的對應邊)

$ab = cd$

證明完畢。

逆定理：如圖四，若兩綫段 AB 和 CD 的延長綫相交於一點 K；$AK = a$，$BK = b$，$CK = c$，$DK = d$；且 $ab = cd$ ，則 A、B、C、D 四點共圓。



圖四

證明：$\angle AKD = \angle CKB$ (公共角)

$ab = cd \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ (已知)

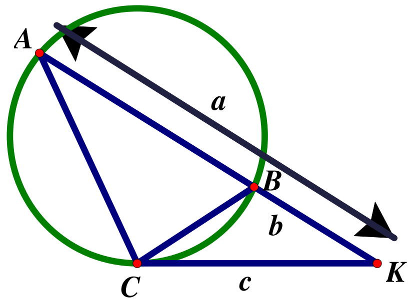
$\therefore \Delta AKD \sim \Delta CKB$ (兩邊成比例，一夾角相等)

$\angle KAD = \angle KCB$ (相似三角形的對應角)

A、B、C、D 四點共圓。 (外角=內對角)

證明完畢。

定理三 如圖五，弦綫 AB 的延長綫和圓上 C 點的切綫相交於一點 K。若 $AK = a$，$BK = b$，$CK = c$，則 $ab = c^2$。



圖五

證明：$\angle BCK = \angle CAK$　　(交錯弓形的圓周角)

$\angle BKC = \angle CKA$　　(公共角)

$\angle CBK = \angle ACK$　　(三角形內角和)

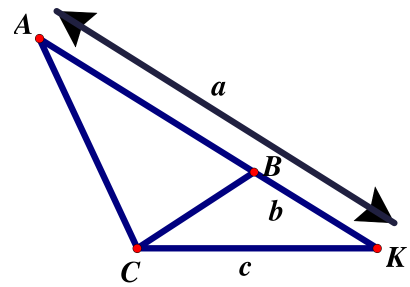
$\Delta CKB \sim \Delta AKC$　　(等角)

$\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$　　(相似三角形的對應邊)

$ab = c^2$

證明完畢。

逆定理：如圖六，已給三角形 ACK，B 在 AK 上；$AK = a$，$BK = b$，$CK = c$；且 $ab = c^2$，則 CK 切圓 ABC 於 C。



圖六

證明：$\angle BKC = \angle CKA$　　(公共角)

$ab = c^2 \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{b}$　　(已知)

$\therefore \Delta AKC \sim \Delta CKB$　　(兩邊成比例，一夾角相等)

$\angle CAK = \angle BCK$　　(相似三角形的對應角)

CK 切圓 ABC 於 C。 (交錯弓形的圓周角的逆定理)

證明完畢。