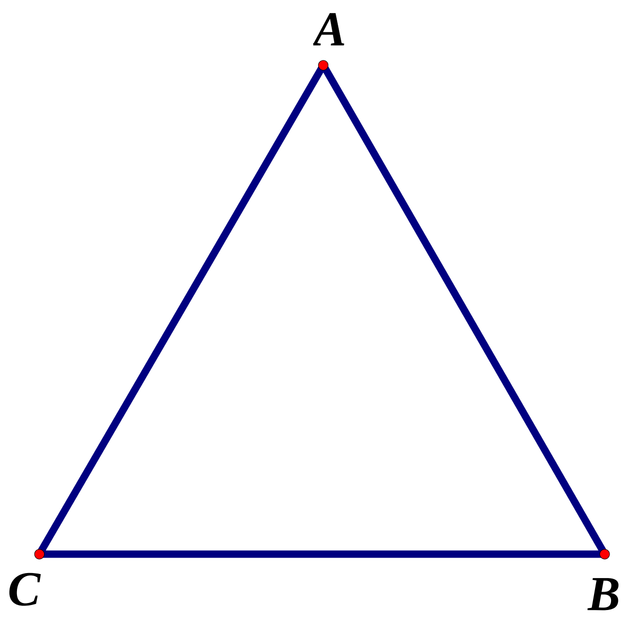
在等邊三角形 *ABC* 內找出一點 *P*，使得 $PA : PB : PC = 3 : 4 : 5$。

Created by Mr. Francis Hung Last updated: 03 July 2023

Locate a point *P* inside an equilateral triangle *ABC* so that $PA : PB : PC = 3 : 4 : 5$.



(1)　以 A 為圓心，AB 為半徑作一圓形。

(2)　於 BC 作垂直平分綫得中點 E。
　　EA 的延長綫交圓形於 F。

(3)　連接 BF、CF。

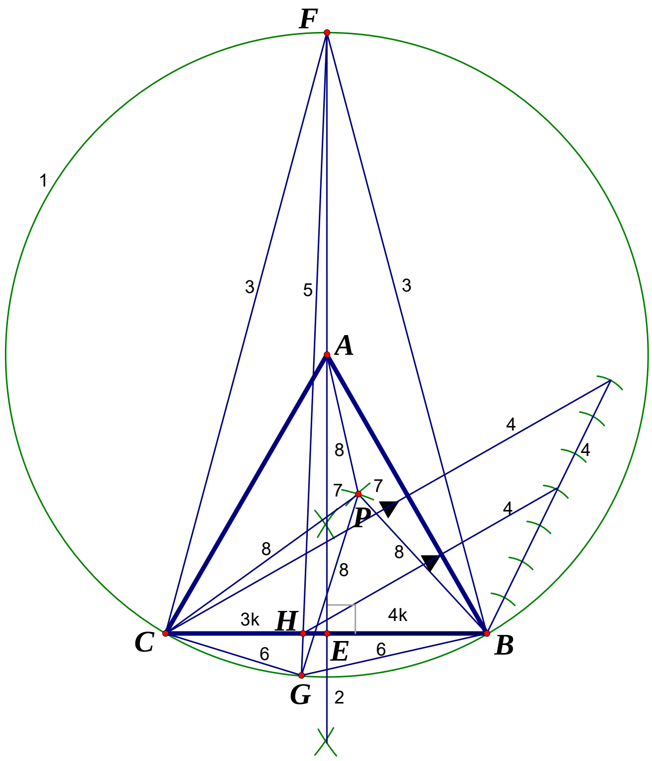
(4)　利用截綫定理找出一點 H，使得
　　$BH : HC = 4 : 3$。

(5)　連接 FH 並延長交圓形於 G。

(6)　連接 BG、CG。

(7)　以 BG 為底作一等邊三角形 BGP。
　　(P 在 ΔABC 內。)

(8)　連接 PA、PB、PC。



作圖完畢，證明如下：

$\Delta FBE \cong \Delta FCE$　(S.A.S.)

$\therefore BF = CF$ (全等三角形對應邊)

設 $BH = 4k$，$HC = 3k$

設 $\angle BHG = \alpha$

$\angle CHG = 180° - \alpha$　(直綫上的鄰角)

$\angle BGF = \angle CGF = \theta$　(等邊對等角)

$4k : \sin\theta = BG : \sin\alpha$ …… (1)　(於 ΔBGH 應用正弦定理)

$3k : \sin\theta = CG : \sin(180° - \alpha)$ …… (2)　(於 ΔCGH 應用正弦定理)

利用 $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$;

(1) ÷ (2): $4 : 3 = BG : CG$

設 $BG = 4t$，$CG = 3t$

$\angle ABP = 60° - \angle CBP = \angle CBG$

$\Delta ABG \cong \Delta CBG$　(SAS)

$AP = CG = 3t$　(全等三角形對應邊)

$BP = BG = 4t$　(全等三角形對應邊)

$\frac{1}{2}$ 反角 $\angle BAC = 300°$　(同頂角)

$\angle BGC = \frac{1}{2}$ 反角 $\angle BAC = 150°$　(圓心角兩倍於圓周角)

$\angle BGP = 60°$　(等邊三角形的角)

$\angle CGP = 150° - 60° = 90°$

$CP^2 = CG^2 + GP^2$　(畢氏定理)

$\quad = (3t)^2 + (4t)^2$

$CP = 5t$

$\therefore PA : PB : PC = 3 : 4 : 5$。

P 滿足以上要求，證明完畢。