已給特定條件，平分三角形的面積

Created by Mr. Francis Hung　　　　Last updated: 2024-11-07

1.　平分直角三角形的面積

ΔABC 為直角三角形，其中$\angle C = 90°$及 $AC < BC$。利用尺規作圖找出一點 D 在 AB 上，使得經過 D 而又垂直 AB 之綫段將ΔABC 的面積分成兩等份。[1]

首先，我們計算BE和AB的關係(其中E為所需垂直綫與BC的交點)：

$\angle ACB = 90° = \angle BDE$　　(已知)

$\angle ABC = \angle EBD$　　(公共角)

$\angle CAB = \angle DEB$　　(三角形內角和)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta EBD$　　(等角)

$$\frac{\Delta BDE\text{的面積}}{\Delta ABC\text{的面積}} = \frac{1}{2} = \left(\frac{BE}{AB}\right)^2$$

$$\frac{BE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow BE = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$

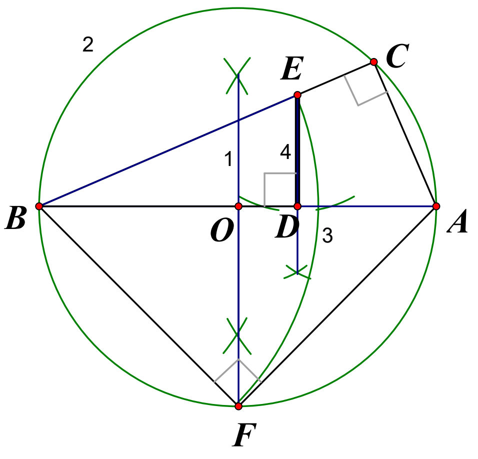
作圖方法如下(圖一)：

(1)　利用垂直平分綫，找出 AB 之中點 O。

(2)　以 O 為圓心 $OA = OB$ 為半徑，作一圓，與剛才的垂直平分綫相交於 F。

(3)　以 B 為圓心，BF 為半徑，作一圓弧，交 BC 於 E。

(4)　自 E 作一綫段垂直於 AB，D 為垂足。



圖一

作圖完畢。

證明如下：

$\angle AFB = 90°$　　(半圓上的圓周角)

ΔAFB 為一個直角等腰三角形

$\angle BAF = 45°$

$$BF = AB \sin 45° = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$

$BE = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$　　(步驟 3 圓弧的半徑)

$\therefore$ DE 將ΔABC 的面積分成兩等份。

證明完畢。

---

[1]題目原自 1957 HKU O Level Mathematics Paper 2 Q2 (*b*)
ABC is a triangle with a right angle at *C* and *AC* < *BC*. Obtain a construction for finding the point *D* on *AB* such that the perpendicular to *AB* at *D* divides the triangle into two parts of equal area.

2. 作一綫段，與三角形的底平行，且平分其面積

已給ΔABC，作一綫段 DE，與 BC 平行，D 在 AB 上，E 在 AC 上，且 DE 平分ΔABC 的面積。

首先，我們計算 DE 和 BC 的關係：

$\angle BAC = \angle DAE$ (公共角)

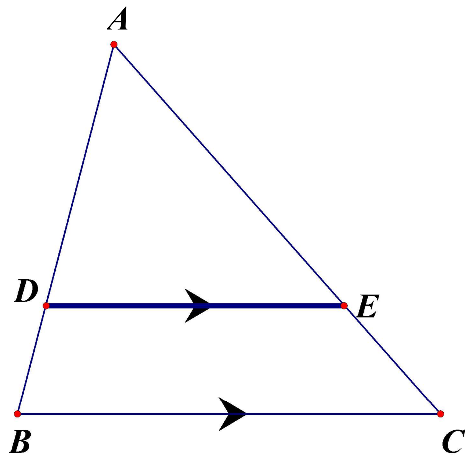
$\angle ABC = \angle ADE$ (DE // BC, 對應角)

$\angle ACB = \angle AED$ (DE // BC, 對應角)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADE$ (等角)

$$\frac{\Delta ADE\text{的面積}}{\Delta ABC\text{的面積}} = \frac{1}{2} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow AD = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$



圖二

作圖方法如下(圖二)：

(1) 利用垂直平分綫，找出 AB 之中點 O。

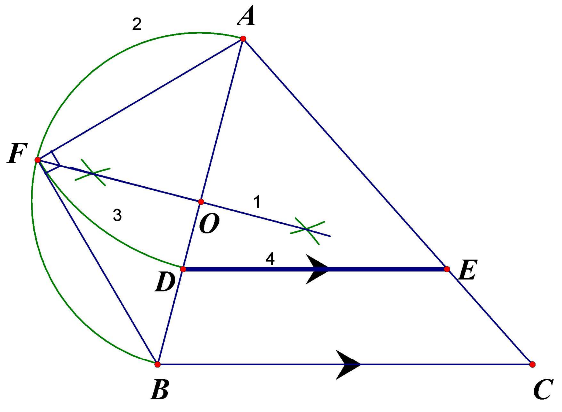
(2) 以 O 為圓心 $OA = OB$ 為半徑，向外作一半圓，與剛才的垂直平分綫相交於 F。(圖三)

$\angle AFB = 90°$ (半圓上的圓周角)

ΔAFB 為一個直角等腰三角形

$\angle BAF = 45°$

$$AF = AB \sin 45° = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$



圖三

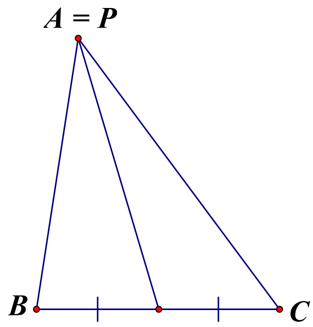
(3) 以 A 為圓心，AF 為半徑，作一圓弧，交 AB 於 D。$AD = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$ 。

(4) 自 D 作一綫段平行於 BC，交 AC 於 E，則ΔADE 平分ΔABC 的面積。

作圖完畢。

3. 已給一點 P 在 ΔABC 的邊上，過 P 作一綫段平分其面積

若 P 在角 A、B 或 C 上，則過 P 作中綫，便可平分其面積。(圖四)



圖四

否則，不妨假設 P 在 BC 上。

若 P 在 BC 的中點，則過 P 作中綫，便可平分其面積。

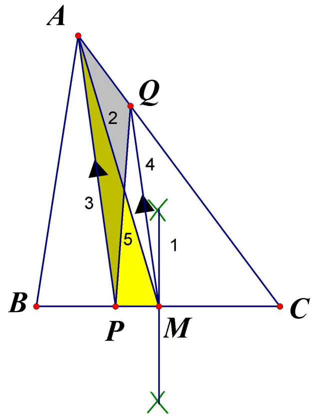
否則，

(1) 利用垂直平分綫，找出 BC 之中點 M。

(2) 連接中綫 AM。

(3) 連接 AP。

若 P 在 BM 之間，(圖五)



圖五

(4) 過 M 作一綫段 MQ 平行於 PA 交 AC 於 Q。

(5) 連接 PQ。

ΔABM 的面積 $= \Delta ACM$ 的面積 $= \frac{1}{2} \Delta ABC$ 的面積

(三角形底相同，高相同。)

ΔAPM 的面積 $= \Delta APQ$ 的面積

(三角形底相同，高相同。)

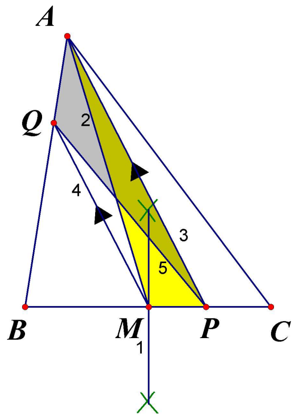
$\therefore$ 四邊形 $ABPQ$ 的面積 $= \Delta ABM$ 的面積

$\therefore PQ$ 平分 ΔABC 的面積

若 P 在 CM 之間，(圖六)

(4) 過 M 作一綫段 MQ 平行於 PA 交 AB 於 Q。

(5) 連接 PQ。



圖六

ΔABM 的面積 $= \Delta ACM$ 的面積 $= \frac{1}{2} \Delta ABC$ 的面積

(三角形底相同，高相同。)

ΔAQM 的面積 $= \Delta PQM$ 的面積

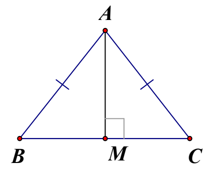
(三角形底相同，高相同。)

$\therefore \Delta BPQ$ 的面積 $= \Delta ABM$ 的面積$= \frac{1}{2} \Delta ABC$ 的面積

$\therefore PQ$ 平分 ΔABC 的面積

4. 作一綫段垂直於 BC，且平分 ΔABC 的面積

若 $AB = AC$，則 ΔABC 為一等腰三角形。
設 M 為 BC 的中點，連接中綫 AM。(圖七)
易證 AM 垂直於 BC，且平分 ΔABC 的面積。



圖七

否則，不妨假設 $AC > AB$，假設 D 為 A 至 BC 之垂足。(圖八)
若 TR 垂直於 BC，且平分 ΔABC 的面積，我們首先計算 CR。
$BC = a$，$AC = b$，$AD = b\sin C$，$CD = b\cos C$。
易證 $\Delta ACD \sim \Delta TCR$ (等角)

$\dfrac{TR}{AD} = \dfrac{CR}{CD} = k$ (相似三角形三邊成比例)

$TR = k\,AD = bk\sin C,\ CR = k\,CD = bk\cos C$

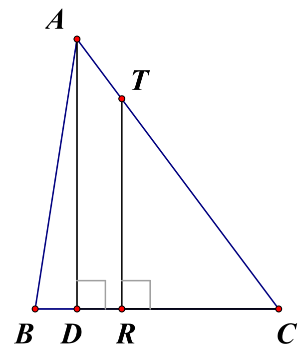
ΔTCR 的面積 $= \dfrac{1}{2}CR\cdot TR = \dfrac{1}{2}b^2k^2\sin C\cos C$

已知 ΔTCR 的面積平分 ΔABC 的面積：

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}b^2k^2\sin C\cos C$$

$$k^2 = \frac{a}{2b\cos C} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{a}{2b\cos C}}$$

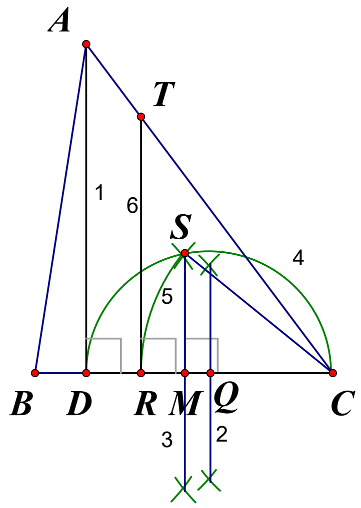
$$CR = bk\cos C = \sqrt{\frac{a}{2b\cos C}}\cdot b\cos C = \sqrt{\frac{ab\cos C}{2}}$$



圖八

作圖方法如下(圖九)：

(1) 過 A 作 AD 垂直於 BC 交 BC 於 D。
(2) 利用垂直平分綫，找出 CD 的中點 Q。
(3) 利用垂直平分綫，找出 BC 的中點 M。
(4) 以 Q 為圓心 $QC = QD$ 為半徑，作一半圓，與步驟(3)的垂直平分綫相交於 S。
(5) 以 C 為圓心，CS 為半徑，作一圓弧，交 BC 於 R。
(6) 過 R 作 RT 垂直於 BC 交 AC 於 T。



圖九

則 TR 平分 ΔABC 的面積，證明如下：

$CD = b\cos C$

$$QC = QD = QS = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}b\cos C$$

$$MC = MB = \frac{1}{2}a$$

$$MQ = MC - QC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\cos C$$

考慮 ΔSMQ，$SM^2 = QS^2 - MQ^2$ (畢氏定理)
考慮 ΔSCM，$SC^2 = SM^2 + MC^2$ (畢氏定理)

$$= QS^2 - MQ^2 + MC^2$$

$$= \left(\frac{1}{2}b\cos C\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\cos C\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}ab\cos C$$

$CR = CS = \sqrt{\dfrac{ab\cos C}{2}}$，根據以上的分析，$RT$ 平分 ΔABC 的面積。

5. 已給一點 P 在 ΔABC 內，作二綫段 PQ 和 PR，Q 和 R 分別在 ΔABC 其中兩邊上，則四邊形 R、P、Q 和 B(或 C)平分其面積。

作圖方法如下(圖十)：

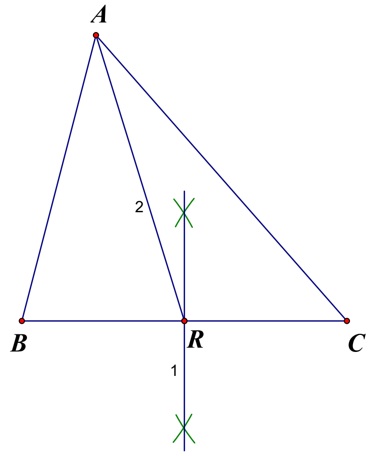
(1) 利用垂直平分綫，找出 BC 的中點 R。

(2) 連接 AR。

ΔABR 的面積 $=\Delta ACR$ 的面積

$=\dfrac{1}{2}\Delta ABC$ 的面積

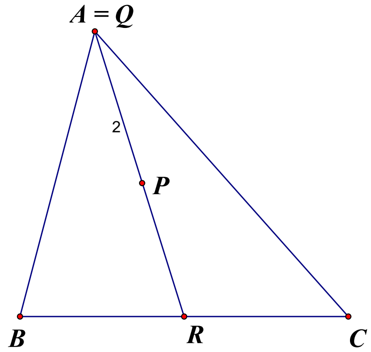
(三角形底相同，高相同。)



圖十

情況 1：若 P 在 AR 上，則設 $Q=A$，四邊形 $RPQB$ 變成三角形 RQB。(圖十一)

明顯地，ΔBQR 的面積 $=\dfrac{1}{2}\Delta ABC$ 的面積



圖十一

情況 2：若 P 在 ΔARC 內，(圖十二)

(3) 連接 AP。

(4) 過 R 作 RQ 平行於 PA 交 AB 於 Q。

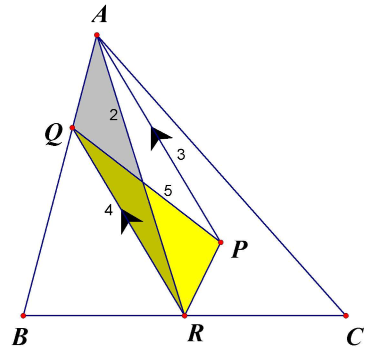
(5) 連接 QP。

ΔQPR 的面積 $=\Delta QAR$ 的面積

(三角形底相同，高相同。)

$\therefore$ 四邊形 $RPQB$ 的面積 $=\Delta ABR$ 的面積

$\therefore$四邊形 $RPQB$ 的面積平分ΔABC 的面積



圖十二

情況 3：若 P 在 ΔARB 內，(圖十三)

(3) 連接 AP。

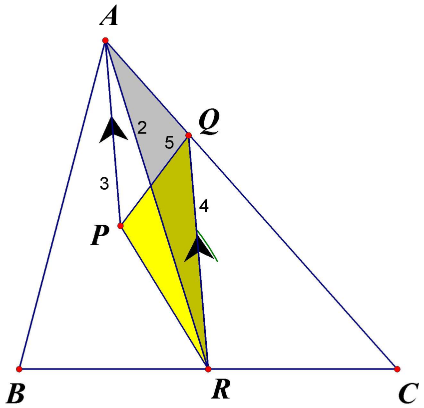
(4) 過 R 作 RQ 平行於 PA 交 AC 於 Q。

ΔQPR 的面積 $=\Delta QAR$ 的面積

(三角形底相同，高相同。)

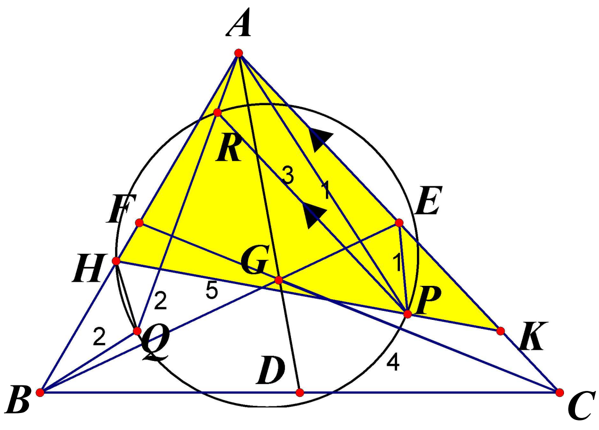
$\therefore$ 四邊形 $RPQC$ 的面積 $=\Delta ACR$ 的面積

$\therefore$四邊形 $RPQC$ 的面積平分ΔABC 的面積



圖十三

6. 已給任意一點 P 在ΔABC 內，過 P 作一綫段 HK 平分ΔABC 的面積，其中 H 和 K 分別在ΔABC 的其中兩邊。



假設 D、E 及 F 分別為 BC、CA 及 AB 的中點。中綫 AD、BE 及 CF 共點於重心 G。
則 P 在以下 6 個三角形之中的其中一個三角形之內：ΔAGE、ΔAGF、ΔBGF、ΔBGD、ΔCGD、或ΔCGE。不妨假設 P 在ΔCGE 之內或邊界上。
作圖方法如下：

(1) 連接 AP 及 PE。
(2) 在ΔABC 內找出一點 Q，使得 $\angle ABQ = \angle APE, \angle BAQ = \angle PAE$。
(3) 過 P 作一綫段 $PR // AE$，且交 AQ 於 R。
(4) 過 P、Q、R 作一外接圓，交 BF 於 H。
(5) 連接 HP，其延長綫交 AC 於 K。

則 HK 平分ΔABC 的面積，作圖完畢。
證明如下：

$\because BE$ 為中綫
$\therefore \Delta ABE$ 的面積為 ΔABC 的面積的一半
由步驟(2)得知 $\Delta APE \sim \Delta ABQ$ (等角)

$\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AE}{AQ}$ (相似三角形的對應邊)

$\therefore AB\times AE = AP\times AQ$ ……… (1)

考慮ΔAHQ 及 ΔAPK
$\angle HAQ = \angle PAK$ (由作圖步驟(2)的結果)
$\angle HQA = \angle HQR = \angle HPR$ (同弓形上的圓周角)
$= \angle HKA$ ($AK // RP$ 的對應角)
$\therefore \Delta AHQ \sim \Delta APK$ (等角)

$\dfrac{AP}{AH} = \dfrac{AK}{AQ}$ (相似三角形的對應邊)

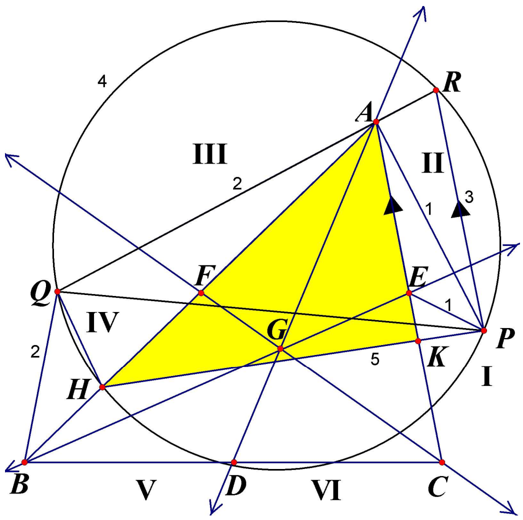
$\therefore AH\times AK = AP\times AQ$ ……… (2)

比較(1)及(2)得 $AH\times AK = AB\times AE$

即 $\dfrac{1}{2} AH \times AK \sin \angle HAK = \dfrac{1}{2} AB \times AE \sin \angle BAC = \dfrac{1}{2} \cdot$ 三角形ABC的面積

因此 HPK 平分ΔABC 的面積，證畢。

7.　已給 P 為任意一點在ΔABC之外，過 P 作一綫段 PKH 平分ΔABC 的面積，其中 H 和 K 分別在ΔABC 的其中兩邊。



假設 D、E 及 F 分別為 BC、CA 及 AB 的中點。
中綫 AD、BE 及 CF 共點於重心 G。
則 P 在以下 6 個無限區域之中的其中一個區域：I、II、III、IV、V、或 VI。不妨假設 P 在區域 I 之內或邊界上。
作圖方法如下：

(1)　連接 AP 及 PE。
(2)　在ΔABC 外找出一點 Q，使得 $\angle ABQ = \angle APE, \angle BAQ = \angle PAE$。
(3)　過 P 作一綫段 $PR // EA$，交 AQ 的延綫於 R。
(4)　過 P、Q、R 作一外接圓，交 BF 於 H。
(5)　連接 HP，交 AC 於 K。

則 HK 平分ΔABC 的面積，作圖完畢。
證明如下：

$\because BE$ 為中綫
$\therefore \Delta ABE$ 的面積為 ΔABC 的面積的一半
由步驟(2)得知 $\Delta APE \sim \Delta ABQ$　(等角)
$\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AE}{AQ}$　(相似三角形的對應邊)
$\therefore AB\times AE = AP\times AQ \cdots\cdots\cdots (1)$
考慮ΔAHQ 及 ΔAPK
$\angle HAQ = \angle PAK$　(由作圖步驟(2)的結果)
$\angle HPR = \angle HKA \cdots\cdots\cdots (2)$　($AK // RP$ 的對應角)
$\angle HKA + \angle PKA = 180° \cdots\cdots\cdots (3)$　(直綫上的鄰角)
$\angle HQR + \angle HPR = 180° \cdots\cdots\cdots (4)$　(圓內接四邊形對角)
$(2) + (3) - (4)$: $\angle PKA - \angle HQR = 0°$
$\therefore \angle HQA = \angle HQR = \angle PKA$
$\therefore \Delta AHQ \sim \Delta APK$　(等角)
$\dfrac{AP}{AH} = \dfrac{AK}{AQ}$　(相似三角形的對應邊)
$\therefore AH\times AK = AP\times AQ \cdots\cdots\cdots (5)$
比較(1)及(5)得 $AH\times AK = AB\times AE$
即 $\dfrac{1}{2} AH \times AK \sin\angle HAK = \dfrac{1}{2} AB \times AE \sin\angle BAC = \dfrac{1}{2}\cdot$三角形$ABC$的面積
因此 HPK 平分ΔABC 的面積，證畢。