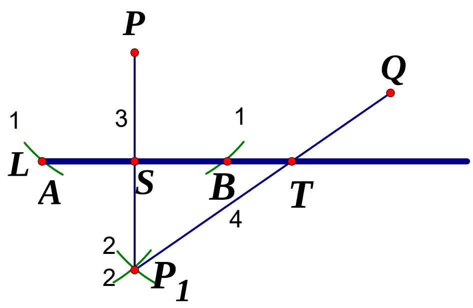
最短距離(一)

Created by Mr. Francis Hung Last updated: 2023-07-03

如圖一，已知一綫段 L，及兩點 P、Q 位於 L 的同一方。在 L 上作一點 T 使得 PT 及 QT 的長度之和最小。[1]

圖一



圖二

作圖方法如下(圖二)：

設 A 為綫段 L 較為接近 P 的一邊的端點。

(1) 以 P 為圓心，PA 為半徑作一弧，交 L 於 A 及 B。

(2) 以 A 為圓心，AP 為半徑一弧；以 B 為圓心，BP 為半徑一弧，兩弧相交於 P_1。

(3) 連接 PP_1，交 L 於 S。

(4) 連接 P_1Q，交 L 於 T。

作圖完畢，證明如下：

$AP = AP_1$	(半徑)
$AB = AB$	(公共邊)
$BP = BP_1$	(半徑)
$\Delta APB \cong \Delta AP_1B$	(S.S.S.)
$\therefore \angle PBA = \angle P_1BA$	(全等三角形的對應角)
$BS = BS$	(公共邊)
$\Delta PBS \cong \Delta P_1BS$	(S.A.S.)
$\therefore \angle BSP = \angle BSP_1$	(全等三角形的對應角)
$= 90^\circ$	(直綫上的鄰角)
$SP = SP_1$	(全等三角形的對應邊)
$ST = ST$	(公共邊)
$\therefore \Delta PST \cong \Delta P_1ST$	(S.A.S.)
$PT = P_1T$	(全等三角形的對應邊)

$PT + QT = P_1T + QT$

已知當 P_1、T、Q 為共綫時(collinear)，$P_1T + QT$ 為最短。

$\therefore$ T 便是題目所需一點，證明完畢。

[1] 香港數學競賽 2009 初賽(幾何作圖)樣本題第 2 題