正方形內接三角形

Created by Mr. Francis Hung　　Last updated: 2023-07-03

已給銳角三角形 *ABC*，利用尺規作正方形 *PQRS*(*P*,*Q* 在 *BC* 上，*R* 在 *AC* 上，*S* 在 *AB* 上)

如圖一，設 $RQ = x$，$BC = a$，由 A 至 BC 的高為 h。

$\Delta ASR \sim \Delta ABC$　(等角)

$\frac{x}{a} = \frac{h-x}{h}$　(相似三角形的對應邊)

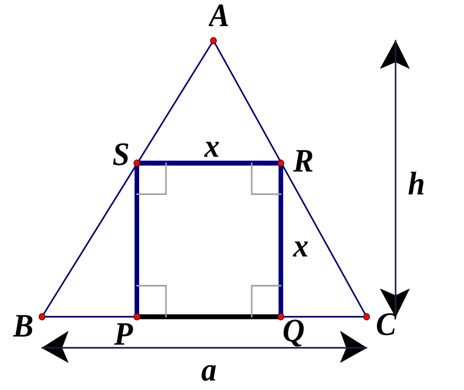
$xh = ah - ax$

$(a+h)x = ah$

$x = \frac{ah}{a+h}$

$\therefore$ 正方形的邊長(x)只與該三角形的底和高有關，

而它(x)和三角形的形狀無關。



圖一

考慮特殊情況：當$\angle ACB = 90°$

若 $BC = a$，$AC = h$ 為固定值，則 x 不變。

正方形的$\angle C = \angle P = 90°$

$SC =$ 正方形的對角綫

$\therefore SC$ 平分$\angle ACB$。

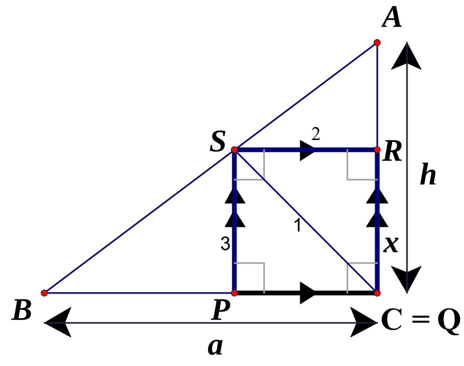
作圖方法如下(圖二)：

(1)　作$\angle ACB$ 的角平分綫 CS，交 AB 於 S。

(2)　過 S 作 SR 平行於 BC，交 AC 於 R。

(3)　過 S 作 SP 平行於 AC，交 BC 於 P。

$PCRS$ 便是該正方形了，作圖完畢。



圖二

一般情況，若$\angle ACB \ne 90°$，作圖方法如下：

方法一(圖三)

(1)　過 C 作 CH 垂直於 BC。

(2)　過 A 作 AH 平行於 BC，交 CH 於 H。

(3)　連接 BH。

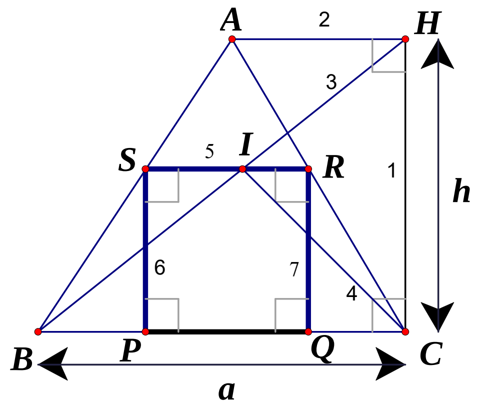
(4)　作$\angle BCH$ 的角平分綫 CI，交 BH 於 I。

(5)　過 I 作 SIR 平行於 BC，交 AB 於 S 及 AC 於 R。

(6)　過 S 作 SP 垂直於 BC，交 BC 於 P。

(7)　過 R 作 RQ 垂直於 BC，交 BC 於 Q。

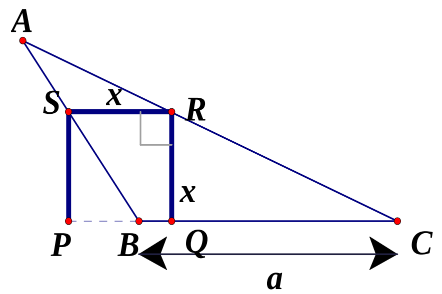
$PQRS$ 便是該正方形了，作圖完畢。



圖三

註：若ΔABC 為鈍角三角形，正方形 $PQRS$ 的底便有可能在三角形 BC 的底以外(圖四)。

為確保 P、Q 在 AB 以內，ΔABC 必須為銳角三角形。



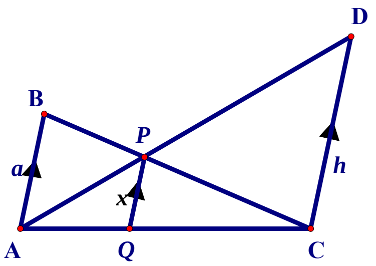
圖四

方法二：如上文，$x=\dfrac{ah}{a+h}$。

試考慮以下問題以作聯想：

如圖五，AQC 為直綫，BA、PQ 及 DC 互相平行。

若 $AB=a$，$CD=h$ 及 $PQ=x$，以 a 及 h 表示 x。



圖五

$\angle PCQ=\angle BCA$ (公共角)

$\angle CPQ=\angle CBA$ (同位角，PQ // BA)

$\angle CQP=\angle CAB$ (同位角，PQ // BA)

$\Delta CPQ\sim\Delta CBA$ (等角)

$\angle PAQ=\angle DAC$ (公共角)

$\angle APQ=\angle ADC$ (同位角，PQ // BA)

$\angle AQP=\angle ACD$ (同位角，PQ // BA)

$\Delta APQ\sim\Delta ADC$ (等角)

$\dfrac{x}{a}=\dfrac{QC}{AC}\cdots\cdots(1)$ (相似三角形的對應邊)

$\dfrac{x}{h}=\dfrac{AQ}{AC}\cdots\cdots(2)$ (相似三角形的對應邊)

(1) + (2):

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{x}{h}=\dfrac{AQ}{AC}+\dfrac{QC}{AC}=1$

$x=\dfrac{ah}{a+h}$

作圖方法如下(圖六)：

(1) 過 A 作 AD 垂直於 BC，D 為垂足。

(2) 過 B 作直綫 BE 垂直於 BC。

(3) 以 B 為圓心，BC 為半徑作一弧，交 BE 於 E。

(4) 連接 DE，交 AB 於 S。

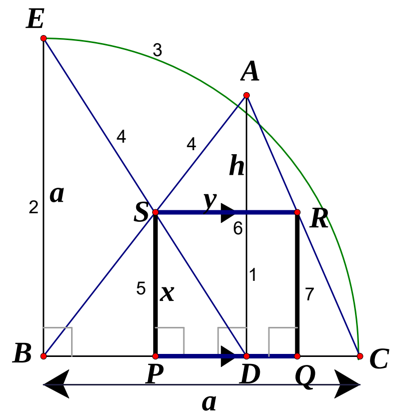
(5) 過 S 作 SP 垂直於 BC，P 為垂足。

(6) 過 S 作 SR 平行於 BC，交 AC 於 R。

(7) 過 R 作 RQ 垂直於 BC，Q 為垂足。

那麼，$PQRS$ 便是一正方形，滿足以上條件。

作圖完畢。



圖六

證明如下：

設 $SP=x, SR=y$。明顯地，$PQRS$ 為一長方形。

由上文得知，$x=\dfrac{ah}{a+h}\cdots\cdots(4)$

易證$\Delta ASR\sim\Delta ABC$ (等角)

$\therefore\ \dfrac{y}{a}=\dfrac{h-x}{h}$ (相似三角形的對應邊)

$y=\dfrac{a}{h}(h-x)\cdots\cdots(4)$

代(3)入(4): $y=\dfrac{a}{h}\left(h-\dfrac{ah}{a+h}\right)=a\left(1-\dfrac{ah}{a+h}\right)=\dfrac{a}{a+h}(a+h-a)=\dfrac{ah}{a+h}=x$

因此，$PQRS$ 為一正方形，證明完畢。