只用圓規平分兩已知點

Created by Mr. Francis Hung.作圖方法由教育局數學教育組吳銳堅博士提供 Last updated: 2023-07-03

已給兩已知點 *A*、*B*，只用圓規找出 *A*、*B* 的中點。 (*A*、*B* 不重疊)

作圖方法如下：

(1) 以 A 為圓心，AB 為半徑作一圓 C_1。

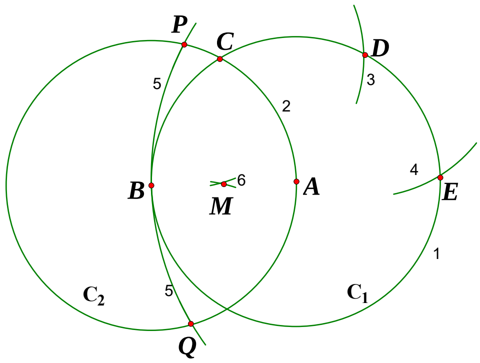
(2) 以 B 為圓心，BA 為半徑作一圓 C_2，交圓 C_1 於 C。

(3) 以 C 為圓心，CA 為半徑作一弧，交圓 C_1 於 D。

(4) 以 D 為圓心，DA 為半徑作一弧，交圓 C_1 於 E。

(5) 以 E 為圓心，EB 為半徑作一弧，交圓 C_2 於 P、Q。

(6) 以 P 為圓心，PB 為半徑作一弧；以 Q 為圓心，QB 為半徑作一弧；兩弧相交於 M。



作圖完畢，證明如下：

設 $AB = r$

易證ΔABC、ΔACD、ΔADE 為等邊三角形。

$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = 60°$

$\angle BAE = 60° + 60° + 60° = 180°$

$\therefore$ BAE 為一平角

$\Rightarrow$ BE 為圓 C_1 的直徑，即 $BE = 2r$。

$BE = EP = EQ = 2r$

ΔBEP 及 ΔBEQ 為全等的等腰三角形 (S.S.S.)

$\angle PBE = \angle QBE \ldots (1)$ (全等三角形對應邊相等)

$PB = PM = QB = QM = r$ (由作圖所得)

$\therefore$ $PBQM$ 為一菱形

$\Rightarrow$ BM 平分 $\angle PBQ \ldots (2)$ (菱形的性質)

考慮ΔBEP 及 ΔBPM：

$\angle EBP = \angle PBM$ (由(1)式及(2)式得知)

$PB = PM$ (由作圖所得)

$\therefore$ ΔBPM 為等腰三角形

$\angle PMB = \angle PBM$ (等腰三角形底角相同)

$\therefore$ ΔBEP 及 ΔBPM 中有兩對角相同

$\Delta BEP \sim \Delta BPM$ (等角)

$\frac{BM}{BP} = \frac{BP}{BE}$ (相似三角形三邊成比例)

$\frac{BM}{r} = \frac{r}{2r}$

$\Rightarrow BM = \frac{1}{2}r$

$\because \angle PBM = \angle PBE$

$\therefore$ B、M、E 共綫

$\Rightarrow$ B、M、A 共綫

$\Rightarrow$ M 為 AB 的中點

證明完畢。