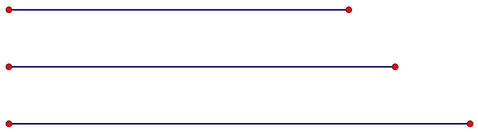
作已知三條中綫的三角形

Created by Mr. Francis Hung on 20140901 Last updated: 2023-07-03

已給三角形的三條中綫，用尺規作該三角形。

Given the lengths of 3 sides of the medians of the triangle, to construct the triangle.



為了作該三角形，我們首先證明三條中綫共點(concurrent)，瞭解其原理。
假設其中兩條中綫 BQ 和 CR 相交於 G (圖 1)。
連接 AG 並延長至 D，使得 $AG = GD$。
假設 AGD 交 BC 於 P。連接 BD、CD。
過 Q 作 QL 平行於 DA，交 BD 的延長綫於 L (圖 2)。
由中點定理得知 $GQ=\frac{1}{2}DC$，$GQ \,//\, DC$，及 $GR=\frac{1}{2}DB$，$GR \,//\, DB$。

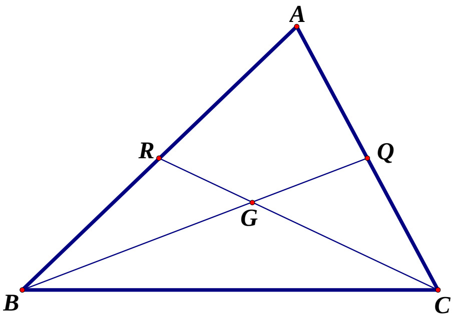


圖 1

$\because GQ \,//\, DC$ 及 $GR \,//\, DB$
$\therefore BDCG$ 為一平行四邊形 (平行四邊形的定義)
$BP = PC$ (平行四邊形對角綫)
因此，AGP 為ΔABC 的中綫。三條中綫共點。
更進一步，$GQ=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}BG$ (平行四邊形對邊)
$GR=\frac{1}{2}DB=\frac{1}{2}CG$ (平行四邊形對邊)
$\therefore BG : GQ = CG : GR = 2 : 1$
同理，易證 $AG : GP = 2 : 1$
每條中綫將其餘兩條分成 $2 : 1$。
另外，ΔBQL 的邊長分別為 3 條中綫的長度。

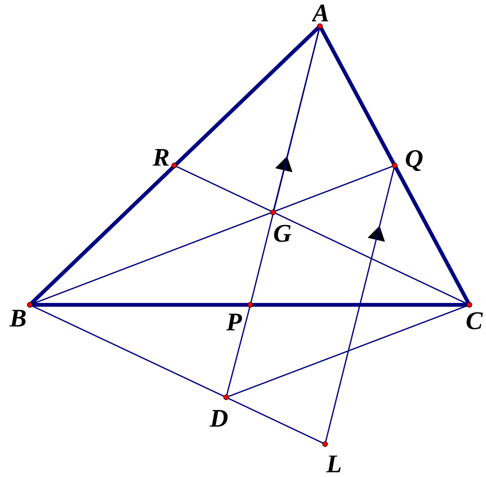


圖 2

作圖方法如下(圖 3 及圖 4)：
假設三條中綫長度為 p、q 及 r。
(1) 作ΔBQL，長度為 $QL = p$、$BQ = q$ 及 $LB = r$。
(2) 利用垂直平分綫找出 QL 的中點 E，連接 BE。
(3) 利用截綫定理，在 BE 上找出 P，使得 $BP = 2PE$。(圖 3)
(4) 在 BE 延長綫上找出 C，使得 $PE = EC$。
(5) 連接 CQ 並延長至 A，使得 $CQ = QA$。
(6) 連接 AB。(圖 4)

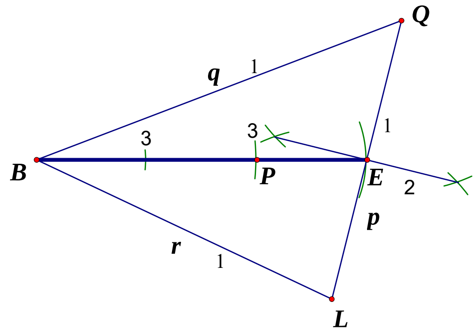


圖 3

作圖完畢，證明如下：
$BQ = q$ 為ΔABC 的中綫。 ($\because AQ = QC$)
E 為 CP 的中點，及 Q 為 AC 的中點。
$AP = 2QE = QL$ (中點定理)
$AP = p$ 為ΔABC 的中綫。 ($\because BP = PC$)
設 R 為 AB 的中點。
$BR=\frac{1}{2}AB = PQ$ 及 $PQ \,//\, BR$ (中點定理)
$\because PE = EC$ 及 $QE = EL$ (由作圖所得)
$PQCL$ 為一平行四邊形 (對角綫互相平分)
$CL = QP$ 及 $CL \,//\, QP$ (平行四邊形對邊)
$\therefore BR = CL$ 及 $BR \,//\, CL$
$BRCL$ 為一平行四邊形 (對邊平行且相等)
$\therefore CR = LB = r$ (平行四邊形對邊)
$CR = r$ 為ΔABC 的中綫。 ($\because AR = RB$)
證明完畢。

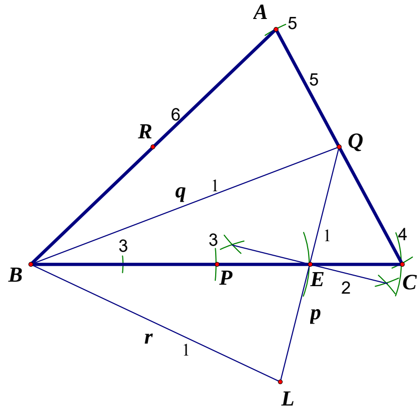


圖 4