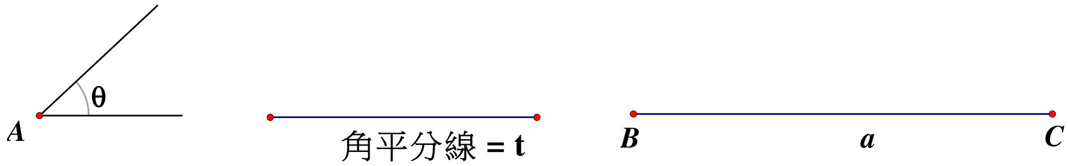
作已知底長，頂角及頂角之角平分綫的三角形

Created by Mr. Hung Tak Wai on 20140901 Last updated: 2021-09-29

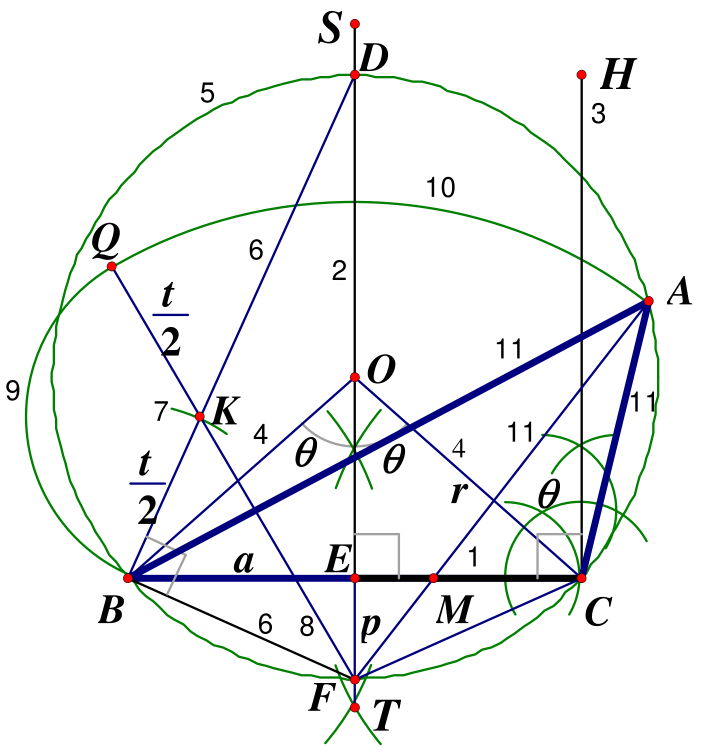
丘成桐教授於 2001 年播出的一輯數學教育電視特輯「丘成桐教授專訪」中提出以下用圓規直尺作的三角形的問題[1]，本人現有一解法。

如圖一，給出以下條件，試作該三角形 *ABC*。

(1) $\angle A = \theta$, (2) $\angle A$ 的角平分綫長度為 t,及 (3) $BC = a$。



圖一



圖二

作圖方法如下(圖二)：

(1) 作 $BC = a$。

(2) 作 BC 的垂直平分綫 SET，E 為 BC 的中點。

(3) 過 C 作一綫 CH 垂直於 BC。

(4) 複製$\angle HCO = \theta = \angle A$，使得 O 在 ST 上，連接 OB。

(5) 以 O 為圓心，$OB = OC = r$ 為半徑作一圓，交 ST 於 D 及 F。

(6) 連接 BF 及 BD。

(7) 以 B 為圓心，$\frac{t}{2}$ 為半徑作一弧，交 BD 於 K。

(8) 連接 FK。

(9) 以 K 為圓心，KB 為半徑作一弧，交 FK 的延長綫於 Q。

(10) 以 F 為圓心，FQ 為半徑作一弧 AQ，交步驟(5)的圓於 A

(11) 連接 AB、AC 及 AF，假設 FA 交 BC 於 M。

作圖完畢。

---

[1] 參考：數學教育電視特輯「丘成桐教授專訪」http://etv.edb.gov.hk/resource/749.doc

證明如下：

$\angle DEC + \angle HCE = 180°$	
$EO \mathbin{//} CH$	(同傍內角互補)
$\angle EOC = \angle HCO = \theta$	(錯角，$EO \mathbin{//} CH$)
$OE = OE$	(公共邊)
$\angle OEB = 90° = \angle OEC$	(直綫上的鄰角)
$BE = CE$	(E 為 BC 的中點)
$\Delta BOE \cong \Delta COE$	(S.A.S.)
$\angle BOE = \angle COE = \theta$	(全等三角形的對應角)
$OB = OC$	(全等三角形的對應邊)

DF 為步驟(5)的圓的直徑 $= 2r$。設 $EF = p$。

$\angle DBF = 90°$	(半圓上的圓周角)
$\Delta BEF \sim \Delta DBF$	(等角)
$\dfrac{BF}{p} = \dfrac{2r}{BF}$	(相似三角形的對應邊)
$BF^2 = 2rp \cdots\cdots (1)$	
$BK = \dfrac{t}{2}$	
$KQ = KB = \dfrac{t}{2}$	
$FK^2 = BF^2 + \left(\dfrac{t}{2}\right)^2$	(於ΔBFK 應用畢氏定理)
$FK = \sqrt{2rp + \left(\dfrac{t}{2}\right)^2}$	(由(1)式得知)
$FQ = \dfrac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\dfrac{t}{2}\right)^2} \cdots\cdots (2)$	
$\angle BAC = \theta$	(圓心角兩倍於圓周角)
$\Delta BEF \cong \Delta CEF$	(S.A.S.)
$BF = CF$	(全等三角形的對應邊)
$\angle BAF = \angle CAF$	(等弦對等角)

$\therefore$ AF 是$\angle BAC$ 的角平分綫交 BC 於 M。

$FA = FQ = \dfrac{t}{2} + \sqrt{2rp + \left(\dfrac{t}{2}\right)^2}$	(由(2)式得知)
$MA \times MF = MB \times MC$	(相交弦定理)
$= (BE + ME)(CE - ME)$	
$= BE \cdot CE - ME^2$	
$= DE \cdot p - ME^2 \cdots\cdots (3)$	(相交弦定理)
$MF \times AF = MF \times (AM + MF)$	
$= MF \times AM + MF^2$	
$= DE \cdot p - ME^2 + MF^2$	(由(3)式所得)
$= DE \cdot p + p^2$	(於ΔEFM 應用畢氏定理)
$= (DE + p) \cdot p$	
$= 2rp$	

$$MF\cdot\left[\frac{t}{2}+\sqrt{2rp+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\right]=2rp$$ (由(2)式所得)

$$MF=\frac{2rp}{\frac{t}{2}+\sqrt{2rp+\left(\frac{t}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{2rp}{\frac{t}{2}+\sqrt{2rp+\left(\frac{t}{2}\right)^2}}\cdot\frac{\frac{t}{2}-\sqrt{2rp+\left(\frac{t}{2}\right)^2}}{\frac{t}{2}-\sqrt{2rp+\left(\frac{t}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{2rp\cdot\left[\frac{t}{2}-\sqrt{2rp+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\right]}{\left(\frac{t}{2}\right)^2-2rp-\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{t}{2}+\sqrt{2rp+\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$AM=AF-MF=\frac{t}{2}+\sqrt{2rp+\left(\frac{t}{2}\right)^2}-\left[-\frac{t}{2}+\sqrt{2rp+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\right]=t$$

證明完畢。