作已知底長，頂角及其餘兩邊之比的三角形

Created by Mr. Francis Hung on 20140901　　Last updated: 2021-09-29

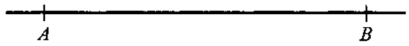

圖 1

如圖 1，給定一綫段 AB。

試作三角形 ABC 使 $AC : BC = 3 : 2$ 及 $\angle ACB = 60^\circ$。[1]

方法一(圖 2)

(1) 作等邊三角形 ABE。

(2) 分別作 AB 和 AE 的垂直平分綫，相交於 O，M 為 AB 的中點。

(3) 以 O 為圓心，OA 為半徑作外接圓 ABE。

(4) 利用截綫定理在 AB 上找出一點 D，使得 $AD : DB = 3 : 2$。

(5) AB 的垂直平分綫交劣弧於 X。延長 XD 並交圓 ABE 於 C。連接 AC 及 BC。

作圖完畢。

證明如下：

設 $\angle ACD = \theta$，$\angle ADC = \alpha$，$AD = 3k$ 及 $DB = 2k$。

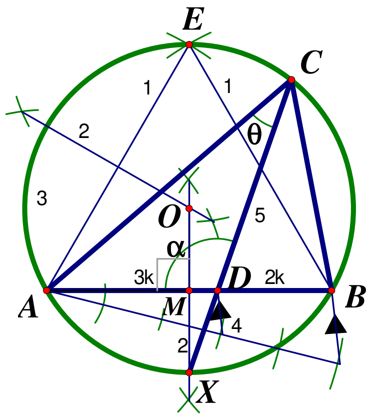

圖 2

$\Delta AMX \cong \Delta BMX$	(S.A.S)
$AX = BX$	(全等三角形的對應邊)
$\angle ACX = \angle BCX = \theta$	(等弦對等角)
$\angle ADC = \alpha, \angle BDC = 180^\circ - \alpha$	(直綫上的鄰角)
$3k : \sin\theta = AC : \sin\alpha$ …… (1)	(在 ΔACD 應用正弦定理)
$2k : \sin\theta = BC : \sin(180^\circ - \alpha)$ …… (2)	(在 ΔBCD 應用正弦定理)

利用恒等式 $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$；

$(1) \div (2)$: $3 : 2 = AC : BC$

$\angle ACB = \angle AEB = 60^\circ$　　(同弓形上的圓周角)

ΔABC 便是該三角形。

證明完畢。

方法二(圖 3)

(1) 以 A 為圓心，AB 為半徑作一弧 PBH。

(2) 作等邊三角形 AHP。(H 是在弧 PBH 上任意一點)

(3) 利用截綫定理在 PH 上找出一點 M，使得 $PM = \frac{2}{3}PH$。

(4) 將 AM 延長，交弧 PBH 於 B。

(5) 過 B 作 BC // PH，與 AP 的延長綫交於 C。

作圖完畢。

證明如下：

$\angle APH = 60^\circ$	(等邊三角形性質)
$\angle ACB = 60^\circ$	(同位角，PH // CB)
$\Delta ABC \sim \Delta AMP$	(等角)
$AC : CB = AP : PM$	(相似三角形的對應邊)

$$= PH : PM = 1 : \frac{2}{3} = 3 : 2$$

ΔABC 便是該三角形。

證明完畢。

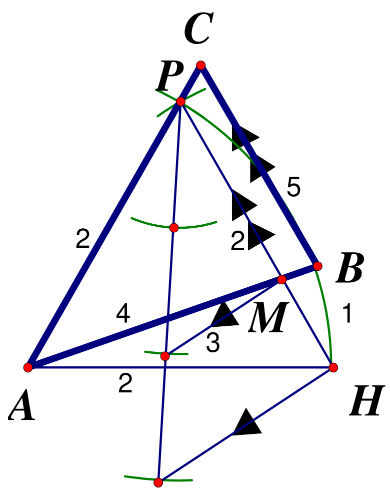

圖 3

[1] 香港數學競賽 2010 初賽(幾何作圖)第 3 題