試作一等邊三角形，使其頂點在三條平行綫上

Created by Mr. Francis Hung on 20140901 Last updated: 2021-09-29

已知三條平行綫 AB // EF // CD，
作一等邊三角形，使其頂點分別在三條平行綫上。[1]

作圖方法如下(圖一)：

(1) 在 AB 上取任意一點 Y。

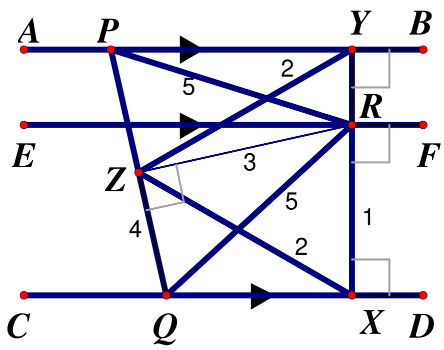
過 Y 作一綫垂直於 AB，交 CD 於 X 及 EF 於 R。

(2) 作一等邊三角形 XYZ。

(3) 連接 ZR。

(4) 過 Z 作一綫垂直於 ZR，交 AB 於 P 及 CD 於 Q。

(5) 連接 PR 及 QR。



圖一

ΔPQR 便是所需的三角形，作圖完畢。

證明如下：

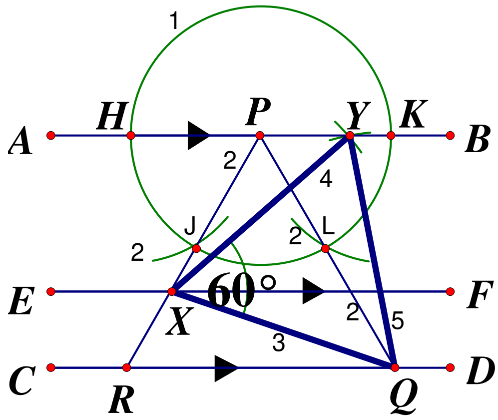
$PQ \perp ZR$ 及 $AB \perp YR$	(由作圖所得)
$\therefore P$、Y、R、Z 四點共圓	(外角=內對角)
$\angle RPZ = \angle RYZ$	(同弓形上的圓周角)
$= \angle XYZ = 60°$	
$PQ \perp ZR$ 及 $CD \perp RX$	(由作圖所得)
$\therefore Q$、X、R、Z 四點共圓	(外角=內對角)
$\angle RQZ = \angle RXZ$	(同弓形上的圓周角)
$= \angle YXZ = 60°$	
$\angle PRQ = 180° - 60° - 60° = 60°$	(三角形內角和)

$\therefore \Delta PQR$ 為一等邊三角形。

證明完畢。

[1]參考：Certificate Amalgamated Mathematics A modern course Volume one by W.K.Chow p.143 Q14

方法二(由荃灣官立中學徐李炘提供)(圖二)：



圖二

(1)　在 AB 上取任意一點 P。
以 P 為圓心，任意半徑作一圓，交 AB 於 H 及 K。

(2)　以 H 為圓心，半徑為 HP 作一弧，交該圓於 J；以 K 為圓心，半徑為 KP 作一弧，交該圓於 L，使得$\angle JPL = 60°$。連接並延長 PJ，交 EF 於 X，及 CD 於 R。連接並延長 PL，交 CD 於 Q。

(3)　連接 XQ。

(4)　過 X 作一綫段 XY，使得$\angle YXQ = 60°$，且交 AB 於 Y。

(5)　連接 YQ。

則ΔXYQ 便是一個等邊三角形了。作圖完畢。

證明如下：

ΔHPJ 及ΔKPL 是等邊三角形	(由作圖所得)
$\angle HPJ = 60° = \angle KPL$	(等邊三角形的性質)
$\angle JPL = 60°$	(直綫上的鄰角)
$\angle PRQ = 60° = \angle PQR$	(AB // CD 的交錯角)
$\therefore$ ΔPQR 是一個等邊三角形	
$\angle QXY = 60° = \angle QPY$	(由作圖所得)
$PXQY$ 為一個圓內接四邊形。	(同弓形上的圓周角的逆定理)
$\angle XYQ = \angle XPQ = 60°$	(同弓形上的圓周角)
$\angle XQY = \angle HPX = 60°$	(圓內接四邊形的外角)

$\therefore$ ΔXYQ 是一個等邊三角形。

證明完畢。

方法三(由譚志良先生提供)(圖三)：

(1) 在 AB 上取任意一點 P。

以反時針方向，作等邊三角形ΔPEG 及ΔPFH。

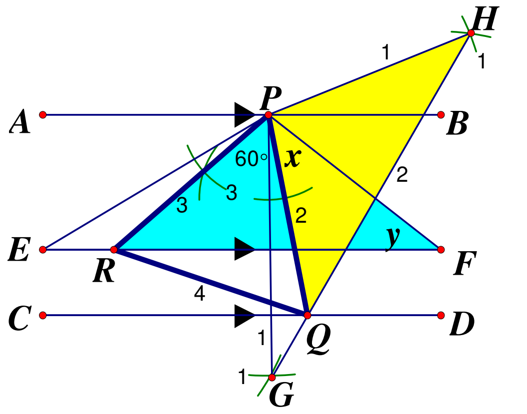
(2) 連接 GH，交 CD 於 Q，連接 PQ。

(3) 以順時針方向，作$\angle QPR = 60°$，交 EF 於 R。

(4) 連接 QR。

則ΔPQR 便是一個等邊三角形了。

作圖完畢。



圖三

證明如下：

設$\angle QPF = x$，$\angle PFE = y$

考慮ΔPEF 及ΔPGH

$PE = PG$，$PF = PH$	(等邊三角形的性質)
$\angle EPG = 60° = \angle FPH$	(等邊三角形的性質)
$\angle EPF = 60° + \angle GPF = \angle GPH$	
$\therefore \Delta PEF \cong \Delta PGH$	(S.A.S.)
$\angle PEF = \angle PHG = y$	(全等三角形的對應角)
$\angle RPF = 60° + x = \angle QPH$	
$PF = PH$	(已證)
$\therefore \Delta RPF \cong \Delta QPH$	(A.S.A.)
$PR = PQ$	(全等三角形的對應邊)
$\therefore \Delta PQR$ 為一等腰三角形	(兩邊相等)
$\angle PQR = \angle PRQ$	(等腰三角形底角相等)
$= (180° - 60°) \div 2$	(三角形內角和)
$= 60°$	

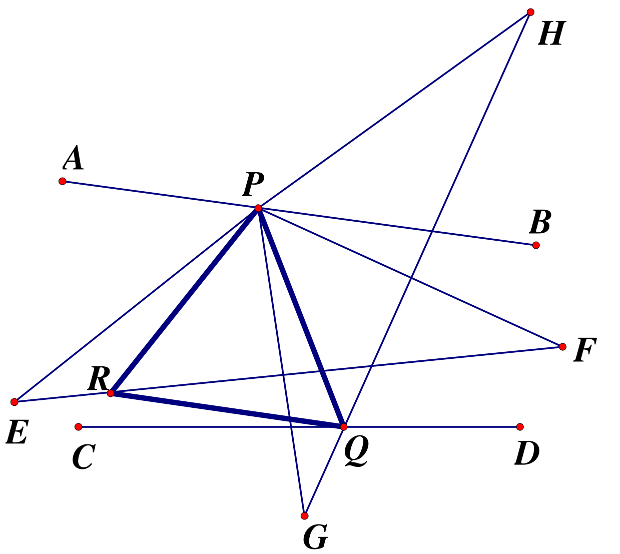
$\therefore \Delta PQR$ 是一個等邊三角形

證明完畢。

註：

以上證明沒有應用 $AB \,//\, CD \,//\, EF$ 的性質，

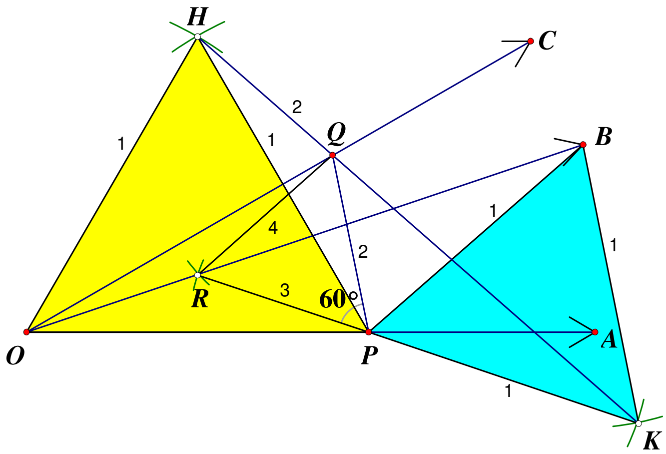
所以這個方法可以適用於任意三條綫。



圖四

已給三條射綫 OA、OB、OC，作一等邊三角形，使其頂點在這三條射綫上

作圖方法如下(圖五)：



圖五

(1) 在 OA 上取任意一點 P。
作等邊三角形ΔOPH 及ΔPBK，
使 H、K 在 OB 的兩邊。

(2) 連接 HK，交 OC 於 Q，連接 PQ。

(3) 以順時針方向，作$\angle QPR = 60°$，
交 OB 於 R。

(4) 連接 QR。

則ΔPQR 便是一個等邊三角形了。

作圖完畢。

證明從略。