最短周界

Created by Mr. Francis Hung on 20140901 Last updated: 2021-09-29

如圖 1，ΔABC 為一銳角三角形。P_1 是 AC 上的一點。試作三角形 P_1XY，使得 X 及 Y 分別為 AB 及 BC 上的點，且 ΔP_1XY 的周界為最短。[1]

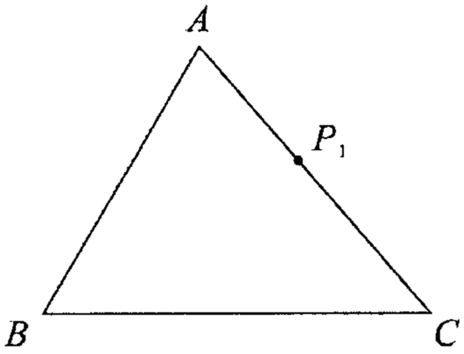

圖 1

作圖方法如下(圖 2)：

(1) 以 A 為圓心，AC 為半徑作一弧。

(2) 以 B 為圓心，BC 為半徑作一弧；此兩弧相交於 C'。

(3) 以 C 為圓心，CA 為半徑作一弧。

(4) 以 B 為圓心，BA 為半徑作一弧；此兩弧相交於 A'。

(5) 以 A 為圓心，AP_1 為半徑作一弧，交 AC'於 P。

(6) 以 C 為圓心，CP_1 為半徑作一弧，交 CA'於 P_2。

(7) 連接 PP_2，交 AB 於 X 及 BC 於 Y。

(8) 連接 P_1X、YP_1。

作圖完畢。

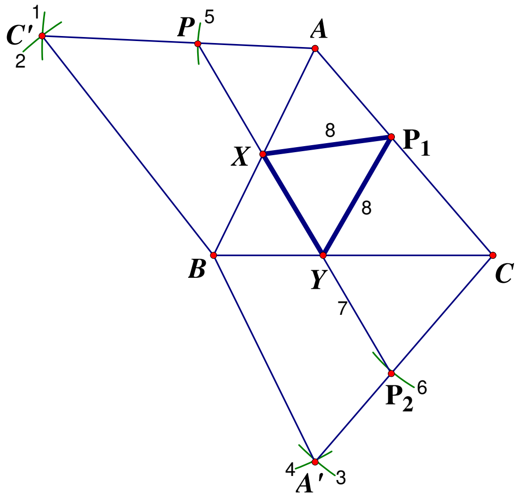

圖 2

證明如下：

$\Delta ABC \cong \Delta ABC'$ (S.S.S.)

$\angle BAC = \angle BAC'$ (全等三角形的對應角)

$\Delta ABC \cong \Delta A'BC$ (S.S.S.)

$\angle ACB = \angle A'CB$ (全等三角形的對應角)

$AX = AX$ (公共邊)

$AP = AP_1$ (由作圖所得)

$\angle P_1AX = \angle PAX$ (已證)

$\Delta APX \cong \Delta AP_1X$ (S.A.S.)

$PX = P_1X$ (全等三角形的對應邊)

$CY = CY$ (公共邊)

$CP_1 = CP_2$ (由作圖所得)

$\angle P_1CY = \angle P_2CY$ (已證)

$\Delta CP_1Y \cong \Delta CP_2Y$ (S.A.S.)

$P_1Y = P_2Y$ (全等三角形的對應邊)

不論 X 和 Y 的位置，P 和 P_2 的位置固定。

ΔP_1XY 的周界$= PX + XY + YP_2$

當 P、X、Y、P_2 共綫時，$PX + XY + YP_2$ 為最短。

ΔP_1XY 便是該三角形。

證明完畢。

[1] 香港數學競賽 2009 初賽(幾何作圖)第 3 題