

Hong Kong Mathematics Olympiad (1991 – 92)
Heat Event (Individual)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：40 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 40 minutes

1. 若 $(\log_{10} x)^4 - 3(\log_{10} x)^2 - 4 = 0$ ，且 $x > 1$ ，求 x 的值。

If $(\log_{10} x)^4 - 3(\log_{10} x)^2 - 4 = 0$ and $x > 1$, find the value of x .

2. 若 $\begin{cases} 28x + 15y = 19xy \\ 18x - 21y = 2xy \end{cases}$ ，且 $xy \neq 0$ ，求 x 的值。

If $\begin{cases} 28x + 15y = 19xy \\ 18x - 21y = 2xy \end{cases}$ and $xy \neq 0$, find the value of x .

3. 由 0 至 9 之中隨機取一整數 a ，已知方程 $x^2 - ax + 3 = 0$ 無實根的概率為 $\frac{p}{10}$ ，求 p 的值。

An integer a lying between 0 and 9 inclusive is randomly selected. It is known that the probability that the equation $x^2 - ax + 3 = 0$ has no real root is $\frac{p}{10}$, find the value of p .

4. x° 為一滿足 $\frac{1}{2}\cos x^\circ \geq \frac{1}{2}(5 - \cos x^\circ) - 2$ 的銳角，求 x 的最大值。

x° is an acute angle satisfying $\frac{1}{2}\cos x^\circ \geq \frac{1}{2}(5 - \cos x^\circ) - 2$.

Determine the largest possible value of x .

5. 設 $f(x)$ 為 $x^4 + 64$ 和 $x^3 + 6x^2 + 16x + 16$ 的最大公因式，求 $f(2)$ 的值。

Let $f(x)$ be the highest common factor of $x^4 + 64$ and $x^3 + 6x^2 + 16x + 16$, find the value of $f(2)$.

6. 果商把一堆橙分成 A 、 B 、 C 、 D 四個等級。 A 級和 B 級橙的數目合起來是 C 級的兩倍； B 級和 D 級橙的數目合起來是 A 級的兩倍。若將 B 級橙中的 7 個升格為 A 級，則 A 級的橙數便是 B 級的兩倍。已知 A 、 B 、 C 、 D 四級橙中，其中某級有橙 54 個，問這是哪一級？

A fruit merchant divides a large lot of oranges into four classes: A , B , C , D . The number of oranges in class A and class B doubles that in class C while the number of oranges in class B and class D doubles that in class A . If 7 oranges from class B are upgraded to class A , class A will then contain twice as many oranges as class B . It is known that one of the four classes contains 54 oranges. Determine which one class it belongs to.

7. 已知 n 為一正整數，求 $x^{2^n} - 10^{2^n} = 0$ 的所有實根。

Given that n is a positive integer, find ALL the real roots of $x^{2^n} - 10^{2^n} = 0$.

8. 若 n 是從 1 至 100 中隨意選取的整數，且 5678^n 的個位數大於 3 的概率是 $\frac{3}{x}$ ，求 x 的值。

If n is an integer randomly selected from 1 to 100, and the probability that the unit digit of 5678^n is greater than 3 is $\frac{3}{x}$, find the value of x .

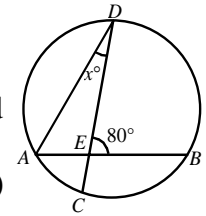
9. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 8$ cm、 $BC = 6$ cm、 $\angle ABC = 90^\circ$ ，

若 $\angle ACB$ 的角平分線與 AB 交於 R ，且 $CR = 3\sqrt{a}$ cm，求 a 的值。

In $\triangle ABC$, $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm and $\angle ABC = 90^\circ$. If the bisector of $\angle ACB$ cuts AB at R and $CR = 3\sqrt{a}$ cm, find the value of a .

10. 在圖一中，弧 BD 的長度是弧 AC 的 4 倍， $\angle DEB = 80^\circ$ 及 $\angle ADC = x^\circ$ ，求 x 的值。

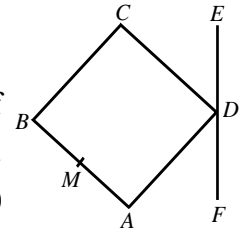
In figure 1, arc BD is 4 times the arc AC , $\angle DEB = 80^\circ$ and $\angle ADC = x^\circ$, find the value of x .



(Figure 1) (圖一)

11. 在圖二中， $ABCD$ 是一正方形， EDF 是一直線， M 是 AB 的中點。若 A 、 M 和 C 到直線 EF 的距離依次為 5 cm、11 cm 和 x cm，求 x 的值。

In figure 2, $ABCD$ is a square. EDF is a straight line. M is the mid-point of AB . If the distances of A , M and C from the line EF are 5 cm, 11 cm and x cm respectively, find the value of x .

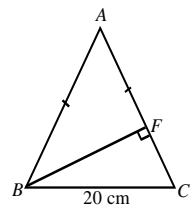


(Figure 2) (圖二)

12. 在圖三中， $AB = AC = 2BC$ 及 $BC = 20$ cm。
若 BF 垂直於 AC ，且 $AF = x$ cm，求 x 的值。

In figure 3, $AB = AC = 2BC$ and $BC = 20$ cm.

If BF is perpendicular to AC and $AF = x$ cm, find the value of x .

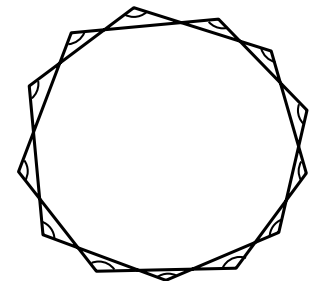


(Figure 3) (圖三)

13. 圖四是延長一個 13 邊形的邊所構成的圖形。若圖中標示的角的和是 n° ，求 n 的值。

Figure 4 shows a figure obtained by producing the sides of a 13-sided polygon.

If the sum of the marked angles is n° , find the value of n .



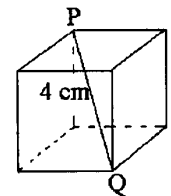
(Figure 4) (圖四)

14. 在圖五中， PQ 為一正方體的對角線。
若 $PQ = 4$ cm，且這正方體的總表面面積為 x cm²，求 x 的值。

In figure 5, PQ is a diagonal of the cube.

If $PQ = 4$ cm and the total surface area of the cube is x cm², find the value of x .

(Figure 5) (圖五)



15. 若 $(3x-1)^7 = a_1x^7 + a_2x^6 + a_3x^5 + \cdots + a_8$ ，求 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8$ 的值。
If $(3x-1)^7 = a_1x^7 + a_2x^6 + a_3x^5 + \cdots + a_8$ ，find the value of $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8$.

16. $A(1, 1)$ 、 $B(a, 0)$ 、 $C(1, a)$ 是三角形 ABC 的頂點，若 $\triangle ABC$ 的面積是 2 平方單位，且 $a > 0$ ，求 a 的值。

$A(1, 1)$, $B(a, 0)$ and $C(1, a)$ are the vertices of the triangle ABC .

Find the value of a if the area of $\triangle ABC$ is 2 square units and $a > 0$.

17. 若 $N = 2^{12} \times 5^8$ ， N 是一個多少位的數字？

If $N = 2^{12} \times 5^8$, find the number of digits of N .

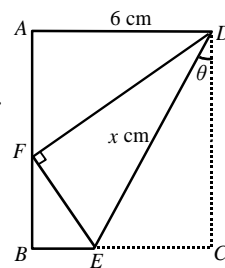
18. 若 $a : b = 3 : 4$ 及 $a : c = 2 : 5$ ，求 $\frac{ac}{a^2 + b^2}$ 的值。

If $a : b = 3 : 4$ and $a : c = 2 : 5$, find the value of $\frac{ac}{a^2 + b^2}$.

19. 一張闊 6 cm 的長方形紙按圖六所示對摺，使得一角與對邊接觸。

若 θ 為 30° ，且 $DE = x$ cm，求 x 的值。

A rectangular piece of paper of width 6 cm is folded such that one corner touches the opposite side as shown in figure 6. If $\theta = 30^\circ$ and $DE = x$ cm, find the value of x .



(Figure 6) (圖六)

20. 若 $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ ，且 $0 \leq x \leq \pi$ ，求 $\tan x$ 的值。

If $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$ and $0 \leq x \leq \pi$, find the value of $\tan x$.

Hong Kong Mathematics Olympiad (1991 – 92)
Heat Event (Group)

除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

時限：20 分鐘

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

每題正確答案得一分。Each correct answer will be awarded 1 mark. Time allowed: 20 minutes

1. 有甲、乙、丙三人，甲的年齡較乙和丙的年齡之和大了 16 歲，甲年齡的平方較乙和丙的年齡之和的平方大 1632，求甲、乙、丙的年齡之和。

A, B, C are three men in a team. The age of A is greater than the sum of the ages of B and C by 16. The square of the age of A is greater than the square of the sum of the ages of B and C by 1632. Find the sum of the ages of A, B and C .

2. a, b, c 為非零實數，且 $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a}$ 。

若 $x = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ 及 $x < 0$ ，求 x 的值。

a, b, c are non-zero real numbers such that $\frac{a+b-c}{c} = \frac{a-b+c}{b} = \frac{-a+b+c}{a}$.

If $x = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ and $x < 0$, find the value of x .

3. 一凸 n 邊形的一個內角是 x° ，其餘各內角之和等於 2468° ，求 x 的值。

An interior angle of an n -sided convex polygon is x° . The sum of the other interior angles is 2468° . Find the value of x .

4. 當正整數 N 除以 4、7、9 時，其餘數分別為 3、2、2。求 N 的最小值。

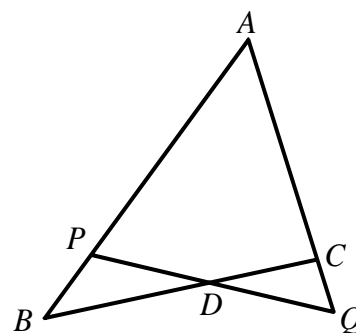
When a positive integer N is divided by 4, 7, 9, the remainders are 3, 2, 2 respectively. Find the least value of N .

5. 求 10^{1991} 除以 7 的餘數。

Find the remainder when 10^{1991} is divided by 7.

6. 在圖一中， $BD = DC$ 、 $AP = AQ$ 。若 $AB = 13$ cm、 $AC = 7$ cm 及 $AP = x$ cm，求 x 的值。

In figure 1, $BD = DC$, $AP = AQ$. If $AB = 13$ cm, $AC = 7$ cm and $AP = x$ cm, find the value of x .



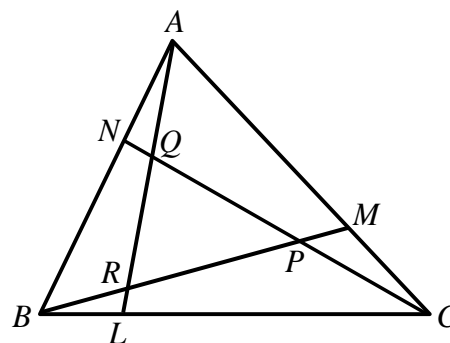
(Figure 1) (圖一)

7. 在圖二中， $BL = \frac{1}{3}BC$ 、 $CM = \frac{1}{3}CA$ 及 $AN = \frac{1}{3}AB$ 。

若 $\triangle PQR$ 及 $\triangle ABC$ 的面積分別為 6 cm^2 及 $x \text{ cm}^2$ ，求 x 的值。

In figure 2, $BL = \frac{1}{3}BC$, $CM = \frac{1}{3}CA$ and $AN = \frac{1}{3}AB$.

If the areas of $\triangle PQR$ and $\triangle ABC$ are 6 cm^2 and $x \text{ cm}^2$ respectively, find the value of x .

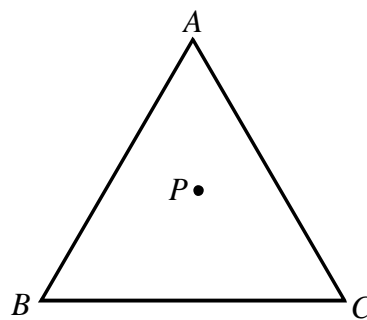


(Figure 2) (圖二)

8. ABC 為一邊長 $\sqrt{12}$ cm 的等邊三角形，而 P 為此三角形內的任意一點(如圖三所示)。若 P 至三邊 AB 、 BC 及 CA 的垂直距離的總和為 x cm，求 x 的值。

ABC is an equilateral triangle of side $\sqrt{12}$ cm, and P is any point inside the triangle (as shown in figure 3). If the sum of the perpendicular distances from P to the three sides AB , BC and CA is x cm, find the value of x .

(Figure 3) (圖三)

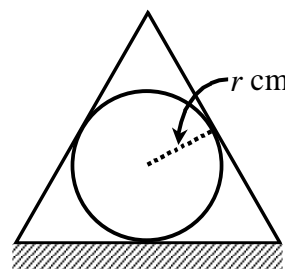


9. 一半徑為 r cm 的球體剛好被一體積為 $\frac{8\pi r^2}{3}$ cm³ 的圓錐形容器

覆蓋於桌上 (如圖四所示)。求 r 的最大可能值。

A sphere of radius r cm can just be covered on a table by a conical vessel of volume $\frac{8\pi r^2}{3}$ cm³ (as shown in figure 4).

Determine the largest possible value of r .



(Figure 4) (圖四)

10. a 、 b 、 c 、 d 為四個數字。已知 (i) a 、 b 、 c ；(ii) b 、 c 、 d ；和 (iii) a 、 b 、 d 的算術平均數依次為 13、15 和 17。若 a 、 b 、 c 和 d 的中位數為 $c+9$ ，求 c 的最大可能值。
 a , b , c , d are four numbers. The arithmetic means of (i) a , b , c ; (ii) b , c , d ; (iii) a , b , d are respectively 13, 15 and 17.
 If the median of a , b , c and d is $c+9$, find the largest possible value of c .