

平 息 與 實 際 年 利 率 的 關 係

Created by Mr. Francis Hung on 20110421

Last updated: September 9, 2021

請細閱以下某財務公司廣告：

貸款多少，都可享有低至每月平 息 0.4%。

實 際 年 利 率 為 9.10%(以 12 個 月 還 款 期 作 計 算)

請問閣下是否相信實 際 年 利 率 9.10% 這 個 數 字 ？

以下文章提供一種驗算方法(validation)。

假 設 貸 款 額 為 \$1000，以 每 月 平 息 0.4% 計 算，分 12 個 月 還 清。

利 息 總 和 = \$1000 × 0.4% × 12 = \$48

本 利 和 = \$1000 + \$48 = \$1048

每 月 的 月 底 還 款 (金 額 相 同) = \$1048 ÷ 12 = \$87.33

另 一 方 面，若 以 實 際 年 利 率 為 9.10%，實 際 月 利 率 為 $r%$ 。

則 $(1 + r\%)^{12} = 1 + 9.1\%$

∴ $r\% = 0.728429\%$

假 設 每 月 的 月 底 還 款 (金 額 相 同) 為 Q ，我 們 不 難 推 算 出 下 列 公 式：

$$Q(1.00728429)^{11} + Q(1.00728429)^{10} + \dots + Q = 1000 \times (1.00728429)^{12} \dots\dots (1)$$

從 等 比 級 數 公 式 (sum to n terms of a G.P.) 可 得：

$$\frac{Q(1.00728429^{12} - 1)}{1.00728429 - 1} = 1000 \times 1.00728429^{12}$$

因 此， $Q \approx 87.33$ 。

原 來 是 因 為 該 財 務 公 司 是 利 用 以 下 公 式 計 算 實 際 年 利 率：

「實 際 年 利 率」是 根 據 香 港 的 銀 行 營 運 守 則 指 引 計 算 出 來 的，是 以 年 計 算 的 利 率，本 港 每 項 貸 款 章 程 中 必 定 會 列 明 實 際 年 利 率。

<http://hk.knowledge.yahoo.com/question/question?qid=7009110800019>

將 每 月 平 息 化 作 實 際 年 利 率 計 算 的 息 率 為：月 平 息 × 還 款 期 數 × 1.9 (不 變 系 數)。

「實 際 年 利 率」為：0.4% × 12 × 1.9 = 9.12%

那 麼，我 們 可 以 用 甚 麼 方 法 計 算 到 實 際 年 利 率 呢 ？

假 設 實 際 年 利 率 為 $R\%$ ，則 實 際 月 利 率 為 $r\%$ ，每 月 還 款 = $Q = \$87.33$ 。

如 (1) 式，我 們 可 以 得 到 另 一 式：

$$Q\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{11} + Q\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} + \dots + Q = 1000 \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{12}$$

$$\text{即 } \frac{Q\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{12} - 1\right]}{\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 1} = 1000 \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{12} \dots\dots (2)$$

設 $x = 1 + \frac{r}{100}$ ，則 (2) 可 寫 成 $Q(x^{12} - 1) = 1000x^{12}(x - 1)$

$$\therefore Q = 87.33 \therefore 262(x^{12} - 1) = 3000x^{13} - 3000x^{12}$$

$$3000x^{13} - 3262x^{12} + 262 = 0 \dots\dots (3)$$

(3) 式為 13 次方的多項式，必須以二分法 (Method of bisection) 求根。

$$f(x) = 3000x^{13} - 3262x^{12} + 262$$

$$f(1.005) = -0.2344 < 0, f(1.01) = 0.5766 > 0$$

∵ $y = f(x)$ 的圖像必定連續 ∴ 有一根 x_0 ，使得 $1.005 < x_0 < 1.01$ 及 $f(x_0) = 0$

a	$x = \frac{a+b}{2}$	$f(x)$	b
1.005	1.0075	+	1.01
1.005	1.00625	-	1.0075
1.00625	1.006875	-	1.0075
1.006875	1.0071875	-	1.0075
1.0071875	1.00734375	+	1.0075
1.0071875	1.007265625	-	1.00734375
1.007265625	1.007304688	+	1.00734375
1.007265625	1.007285157	-	1.007304688
1.007285157	1.007294923	+	1.007304688

$$\therefore 1.007285157 < x_0 < 1.007294923$$

$$x_0 = 1.00729 \text{ (準確至小數點後 5 位)}$$

$$x_0 = 1 + \frac{r}{100} = 1.00729$$

$$r\% = 0.729\% \text{ (準確至小數點後 2 位)}$$

實際年利率為 $R\%$ ，則實際月利率為 $r\%$

$$1 + R\% = (1 + 0.729\%)^{12} = 1.0091$$

$$R\% = 9.1\%$$

此答案與先前驗證的數字吻合。

特別鳴謝：羅嘉豪老師指出原文的重大錯誤。

- (1) 原文第一版本計算實際月利率為 $r\% = \frac{R}{12}\%$ ，這是錯誤的。
- (2) 「月平息×還款期數×1.9」這公式並非來自銀行營運守則。銀行營運守則 (http://www.info.gov.hk/hkma/chi/public/cbp_2001/cbp_chi.pdf) 中並沒載有計算實際年利率的方法，計算方法是另載在銀行公會的文件中的。而有關文件中的計算方法亦不是「月平息×還款期數×1.9」，這條公式只是供一般人用作估算近似值。文中提到 1.9 是個不變常數，但其實 1.9 這個常數只適用於 12 個月的還款期。(例如，當還款期數 = 1 時，公式變成 實際年利率 = 月平息×1.9，這顯然是不合理的。)

荃灣官立中學
孔德偉老師